立方类型论入门

∞-type Café 暑期学校讲座

Jul 15, 2023

Tesla Zhang
teslaz@cmu.edu

目录

全文使用香蕉空间风格的术语翻译和书写规范. 例如非中文的人名统一保留源语言中的拼写, 笔者不知道中文名写法的中文名也会使用英语写法. 简短的字母, 编程语言的名字和符号也不翻译. 比如, 相等类型的消去规则保留 J 规则这个名字, 数学公式中「胶合类型」也会写作 Glue. 标点符号全部使用半角. 作者水平有限, 讲义也是在仓促之间写就, 若读者发现本文有不连贯的地方, 遗漏或者错误, 请联系作者.

在开始之前, 笔者引用另一位主讲人狗先生的一段话 (标点符号保留原文)[1]:

> 在寒冷的夜晚, 两个孩子生起了篝火, 越来越多迷路的孩子来到了火堆边。他们感到无比幸福。天亮了, 孩子们慢慢地找到了自己的路, 于是一个个地远去了。但他们永远不会忘记那个曾经给予过他们温暖的篝火。

另外感谢其它几位主讲人和暑校相关人员对本文档早期版本的建议. Alias Qli, 娜娜琪, Tiezhi Wang, 刘汝佳和面皮都给出了很有价值的建设性建议, 另一位讲师 Rongji Kang 对一些翻译提出了非常多的修改意见. 这也导致早期版本中有很多术语的中文翻译和现在不同, 但新的翻译更加准确. 还要特别感谢 Tiezhi Wang 给本文新增的一些难以绘制的图表, 甚至还引入了坐标轴, 大大提高了可读性. 另外「无懈可击99」问了一些笔者原本打算省略掉的内容, 虽说丰富了讲义, 但也导致增加了很多工作负担, 我真是谢谢你.

1. 前置知识

读者应该大致了解同伦类型论中的视角和基本概念:

- 相等类型视作空间中的道路后, 类型具有的空间结构, 以及同伦层级的思想,
- 泛等公理的定义和基本用法,
- 常见的高阶归纳类型.

读者需要非常熟悉 Martin-Löf 类型论中的基本概念:

- 类型论的基本概念: 形成规则, 构造规则, 消去规则, 计算规则, 唯一性规则,
- 归纳类型的基本概念, 包括模式匹配的记号,
- 相等类型本身的定义, 包括 J 规则,
- 宇宙的概念, 包括宇宙的层次结构, 如何避免一致性问题等. 宇宙记作 $\mathcal{U}$.

这也意味着读者需要相对熟悉有类型 λ 演算中的基本概念:

- 基于 De Bruijn 编号的无名表示 (具体定义不是重点, 重点是这样的事物存在),
- 类型论和逻辑学的类比, 换言之即 Curry–Howard 对应,
- 常见的归纳类型的定义, 例如 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, List 等,
- 语境和类型规则的思想.

这些概念和资料可以从不计其数的渠道获取, 这里罗列一些资料:

- **推荐**: ∞-type Café 暑期学校讲座的其它内容, 这些内容和本文进行过符号和术语上的统一,
- 《类型论简史》, 可以从 https://github.com/Trebor-Huang/history 下载,
- 香蕉空间的类型论板块, https://www.bananaspace.org/wiki/模板:类型论,
- 《同伦类型论 — 泛等数学基础》[1] 和它配套的网站.

最后一篇是英语资料, 其它都是中文资料.

本讲义会穿插一些语义视角的讨论, 这些讨论会使用较多数学术语, 需要读者对范畴论和抽象同伦论有一定了解, 这些知识可以通过 Rongji Kang 在 ∞-type Café 暑期学校的讲座获取, 本讲义也可以和他的讲义配合阅读, 从不同的视角出发看待同一事物可以加深理解. 除此之外, 部分内容还需要对预层模型有初步的了解 (至少知道什么是形式丛), 这是类型论的范畴语义的常识.

本讲义尽可能保证这些讨论数学知识的文本被删除/忽略后, 剩下的内容也是连贯且可读的. 换言之, 本讲义的硬性前置知识基本上只有依值类型论的基本概念, 但如果读者有一些基本的数学背景, 将能学到更多.

[1] https://infinity-type-cafe.github.io/ntype-cafe-summer-school

本文将会使用相对非正式的语气书写, 不仅是为了降低阅读难度, 也是为了增加乐趣. 笔者最近看了很多柯洁九段的视频, 对他的把欢声笑语带到专业场合的天赋深感憧憬. 希望本讲义也能让读者认为立方类型论是一个有趣的研究课题.

笔者在编写本文时没有想到的是刘汝佳也会阅读这个讲义. 笔者多年前在他的《算法竞赛入门经典》中获益匪浅, 而他在阅读本文时也积极地给出诸多反馈建议. 笔者对此感到万分荣幸.

1.1. 基础方面的假设和符号约定

为了确保我们不被无聊的细节转移注意力, 本讲义做出如下假设:

- 避免关于替换操作的具体实现的讨论. 全文的类型论表达式都会使用带名字的变量, 并假设它们实际上是某种 De Bruijn 编号表示. 例如, $\lambda x.\, x$ 和 $\lambda y.\, y$ 是同一个表达式. 换言之, 采取「写作变量名, 读作无名表示」的策略.
- 避免关于宇宙分层的讨论. 避免宇宙导致的一致性问题非常简单, 不应该在这件事上浪费笔墨. 本讲义在写就时, 精神上遵循的是 Conor McBride 风格的宇宙分层策略 (原名「粗略但好使的分层」), 参见 [2], 但这不影响本文的任何内容.
- 在 Russell/Tarski 风格的宇宙之间, 选择弱 Tarski 宇宙, 采取「写作 Russell 宇宙, 读作 Tarski 宇宙」的策略. 但这也不会成为讨论的重点, 读者不需要知道什么是 Tarski 宇宙.
- 在《类型论简史》中, 作者使用的「典范性」和「闭典范性」在香蕉空间被管理员否认, 并推荐分别翻译为「正规性」和「典范性」, 这导致「典范性」一词在香蕉空间和在《类型论简史》中的含义不同. 虽然笔者非常喜欢《类型论简史》作者使用的术语, 但考虑到香蕉空间是在线资源, 因此本讲义使用了香蕉空间的翻译.

关于符号, 采用如下约定:

- 使用 $=$ 表示命题相等, 类型写在下标处 (例如 $u =_X v$), 若很明显时会省略. $\equiv$ 表示不用命题表示的相等, 在部分文献中又叫「判断相等」.
- 使用 $:\!\equiv$ 表示「定义为」, 或者「令某变量为某表达式」.
- 在书写类型规则时, 若语境在整条规则中都是显然的, 那么会省略类似 $\Gamma \vdash$ 或者 Γ 的前缀. 例如, 函数类型的构造规则写作:

$$\frac{x : A \vdash u : B}{\lambda x.\, u : A \to B}$$

  它应该被理解为:

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash u : B}{\Gamma \vdash \lambda x.\, u : A \to B}$$

- 依值类型的形成规则使用类似 Agda, Nuprl 代码中的语法, 例如 Π 类型写作 $(x : A) \to B$ 而不是 $\prod_{x:A} B$. 这个语法更接近代码.
- 函数应用尽可能使用 $f(x)$ 这样的括号语法, 而不是 $f\ x$ 这样的空格语法.
- 使用 $\mathcal{J}$ 代表任意类型论判断 (也就是写在 $\Gamma \vdash$ 右边的东西), 比如 $u : A, u \equiv v : A$ 这样的表达式都可以用 $\mathcal{J}$ 代指, 并且定义 $\mathcal{J}[x \mapsto v]$ 为「将 $\mathcal{J}$ 中全部的变量 x 都替换为 v」的操作.
- 类型论规则定义时, 有时会出现多条规则的条件部分是相同的, 但是结论不同. 为了节约篇幅, 我们把这些结论写到一起. 例如, 积类型的消去规则写作:

$$\frac{u : A \times B}{u.1 : A \qquad u.2 : B}$$

  这个记法有非常重大的问题, 因为 Gentzen 风格相继式演算中有很类似的语法, 但是语义是正好相反的: 相继式演算中在结论处有多个公式的话表示这些公式中的一个成立, 而不是全部都

成立. 但是这个语法实在是太方便了, 既方便阅读又节约空间. 我们姑且把它当作是一种自然演绎的变种.
- 积类型的构造规则使用 $\langle u, v, \ldots \rangle$ 这个语法.
- 「计算规则」和 β 规则在本讲义中是同义词. 同理「唯一性规则」和 η 规则也是同义词.

2. 立方类型论的动机

同伦类型论中引入了大量的公理:

- 泛等公理: $(A = B) \simeq (A \simeq B)$,
- 高阶归纳类型的存在: 例如 S^1, T^2, Klein 瓶等经典空间的同伦型.

这些公理破坏了类型论良好的计算性质, 例如它缺少典范性 — 通过泛等公理构造的相等证明不存在对应的表达式形态, 只能保持「对公理的调用」形式. 在这种状态下做形式化证明是不优雅的. 比如我们认为根据合流性应该成立的等式可能并不能直接成立, 导致需要人工证明一些看起来很显然的事情.

但是, 同伦类型论给出的诱惑实在是太大了, 比如它通过泛等公理给出了函数外延性的证明, 以及借助高阶归纳类型的思想给出了一些常用的集合论构造的类型论版本, 如商集 (等价类), 无序列表等. 因此把同伦类型论实现为一个可计算的理论是非常有价值的.

对于研究数学的人而言, 同伦类型论给出了一种描述同伦型的优雅语法, 它的表达力和经典同伦论语言近似 (都能描述基本群, 同伦群, 环路空间, 纬悬, Hopf 映射等常见构造, 也能描述选择公理), 却有着更好的性质, 例如它作为范畴总是有指数对象, 而不需要加上类似紧生成弱 Hausdorff 的条件. 这样的性质也是继承自类型论的优良传统: 能写出来的东西性质都很好.

对于需要发表数学论文的人而言, 同伦类型论作为一种新的语言, 能给许多经典的定理带来新的证明, 也能加深大家对同伦论的理解. 例如它引入的编码–解码法就是很好的例子, 传统的一般拓扑学中, 证明 $\pi_1(S^1)$ 同构于 $\mathbb{Z}$ 的加法群用到了万有覆叠, 而同伦类型论中的证明则是借助了泛等公理将 S^1 编码为类型. 这种思路和传统类型论中使用某些等价于命题相等的类型辅助证明是类似的, 这也意味着潜在的跨学科互相找灵感的空间.

对于研究类型论的人而言, 立方类型论的设计和实现用到了大量的语义技术, 例如一般的类型论中只有形成, 构造, 消去, 计算, 唯一性这几种规则, 而立方类型论引入了新的 Kan 规则 (就是复合和转换规则的统称). 除此之外, 立方类型论使用了语境范畴上的自函子 (也就是语境限制操作), 这是一种类似模态的技术, 可以作为入门抽象的模态类型论的动机. 通过了解这些做法, 可以消除对类型论的一些不正确的刻板印象 (例如语境总是由一组类型生成, 类型规则只有固定的几种等), 或许能启发出一些其它的类型论设计.

对于研究编程语言的人而言, 立方类型论展示了一种全新的使用编程语言的方式, 它的表达式在范畴语义中对应着任意维度的立方体, 而不是一维的字符串. 除此之外, 立方类型论还提供了一种借助编程语言的直觉来理解同伦论的方式, 这得益于类型论身为综合数学御用内语言的优势.

对于研究计算机科学的人而言, 立方类型论可能提供了一种零知识证明的手法, 即给出大定理的证明的正规形式, 这个证明可以由计算机验证, 但立方类型论的证明的特色就是正规形式复杂度突破天际, 难以从中提取出人类可读的证明思路.

立方类型论是一种同伦类型论的典范「实现」. 有如下两种方式看待立方类型论:

- 语义视角: 将依值类型论中的所有对象全部升级为**方形集**, 这是一种类似单纯集的预层构造, 但使用方形范畴代替单形范畴.
- 语法视角: 通过重新定义 Martin-Löf 类型论中的相等类型以将同伦类型论中的公理转化为新的相等类型上的定理.

除此之外, 立方类型论甚至满足一些超过了 Martin-Löf 类型论的性质, 这也是很有价值的. 本讲义会介绍其中的一部分.

3. 新的相等类型

在经典同伦论中, 对于拓扑空间 X 以及 $x, y \in X$, 其间的道路 $p : x = y$ 表示为一条连续函数 $p : \mathbb{I} \to X$, 其中 $\mathbb{I}$ 是实数上的单位区间 $[0, 1]$, 满足 $p(0) = x, p(1) = y$. 立方类型论在 Martin-Löf 类型论的基础上, 引入类型 $\mathbb{I}$ 来模拟这个道路的定义, 但实数的理论是非常复杂的, 好在实数的大部分性质我们也不需要 (例如我们不需要它有不可数无穷多个元素), 因此立方类型论使用公理化的定义来模拟它.

定义 3.1:
- $\mathbb{I}$ 是一个类型 (形成规则),
- $0, 1 : \mathbb{I}$ 是空语境下的值 (构造规则).

对 $\mathbb{I}$ 类型的实例的操作必须保持连续. 最常见的反例是模式匹配, 我们不能在 $\mathbb{I}$ 上使用模式匹配. 在这之上可以直接将公理翻译过来, 定义相等类型:

$$\frac{x : X \qquad y : X}{x =_X y : \mathcal{U}}$$

在有了类型的定义后, 我们照搬同伦论的思路定义它的构造规则:

$$\frac{i : \mathbb{I} \vdash u : X \qquad u[i \mapsto 0] \equiv x \qquad u[i \mapsto 1] \equiv y}{\langle i \rangle u : x =_X y}$$

这个记号 $\langle i \rangle u$ 模拟 λ 表达式 $\lambda i.\, u$. 另一种写法是

$$\frac{i : \mathbb{I} \vdash u : X}{\langle i \rangle u : u[i \mapsto 0] =_X u[i \mapsto 1]}$$

消去规则作为构造规则的对偶, 需要完全反映构造规则给出的信息. 换言之, 若我们知道 $p : x =_X y$, 那么 p 是可以当成一个函数 $\mathbb{I} \to X$ 来看待的, 而且我们还知道 $p(0) = x, p(1) = y$. 这些信息通过消去规则和计算规则实现.

$$\frac{p : x =_X y \qquad i : \mathbb{I}}{p @_{x,y} i : X}$$

消去规则中, 我们把相等类型的两个端点记录在表达式里, 并且在这些信息显然时忽略它们, 简写作 $p \mathbin{@} i$. 在实现立方类型论的编译器时, 若不在语法树中保存这一信息, 就需要在化简表达式时获取 p 的类型, 这是很麻烦的. 为了避免这一问题, 消去规则中显式地记录了 x 和 y (看不懂没关系，后面不会用到).

$$\frac{p : x =_X y}{p \mathbin{@} 0 \equiv x \qquad p \mathbin{@} 1 \equiv y}$$

通过这些规则, 可以证明一些明显的命题, 例如:

命题 3.1: 对于 $x : X$, 有 $x =_X x$. 该命题的证明记作 idp.

证明: $\langle i \rangle x$ □

命题 3.2: 对于 $x, y : X$ 和 $f : X \to Y$, 有 $x =_X y \to f(x) =_Y f(y)$. 该命题的证明记作 ap.

证明: $\lambda p. \langle i \rangle f(p\ @\ i)$ □

这个证明性质非常好, 它满足一些 Martin-Löf 类型论版本中不满足的性质, 例如:

$$\mathrm{ap}(f \circ g, p) \equiv \mathrm{ap}(f, \mathrm{ap}(g, p))$$

在 Martin-Löf 类型论中, 需要对 p 进行归纳才能证明这一性质.

命题 3.3: 对于 $f, g : X \to Y$, 有 $((x : X) \to f(x) =_Y g(x)) \to f =_{X \to Y} g$.

证明: $\lambda p. \langle i \rangle \lambda x. p(x)\ @\ i$ □

但有了这些还不够, 比如我们暂时还没有 J 规则, 目前有的基本操作也不能给我们证明相等的传递性等等.

3.1. 依值相等

我们略微推广相等类型的定义, 允许两端点的类型不同, 但是要求它们的类型是同伦等价的:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U} \qquad x : A(0) \qquad y : A(1)}{x =_A y}$$

其它规则都是类似的. 在 Agda 中, 对应依值相等的类型叫做 `PathP`. 注意这不同于 Conor McBride 提出的异质相等类型 (也就是 Idris 语言使用的相等类型), 他的异质相等类型不需要两边的类型同伦等价, 和泛等公理不兼容, 我们不作讨论.

依值相等非常方便. 考虑定长列表类型 Vec:

$$\frac{n : \mathbb{N} \qquad A : \mathcal{U}}{\mathrm{Vec}(A, n) : \mathcal{U}}$$

容易定义它上面的拼接操作: $\oplus : \mathrm{Vec}(A, n) \to \mathrm{Vec}(A, m) \to \mathrm{Vec}(A, n + m)$, 但要想表达它的结合性, 在 Martin-Löf 类型论中并不方便. 考虑如下变量:

$$\mathrm{xs} : \mathrm{Vec}(A, n)$$
$$\mathrm{ys} : \mathrm{Vec}(A, m)$$
$$\mathrm{zs} : \mathrm{Vec}(A, o)$$

那么有:

$$\mathrm{xs} \oplus (\mathrm{ys} \oplus \mathrm{zs}) : \mathrm{Vec}(A, n + (m + o))$$
$$(\mathrm{xs} \oplus \mathrm{ys}) \oplus \mathrm{zs} : \mathrm{Vec}(A, (n + m) + o)$$

要想表达这两个表达式相等的命题比较困难, 因为两边类型不匹配. 使用依值相等可以得到一种非常优雅的表达方式:

$$\mathrm{xs} \oplus (\mathrm{ys} \oplus \mathrm{zs}) =_{\mathrm{ap}(\lambda n.\ \mathrm{Vec}(A,n),\ +\text{-assoc})} (\mathrm{xs} \oplus \mathrm{ys}) \oplus \mathrm{zs}$$

其中 $+\text{-assoc} : n + (m + o) = (n + m) + o$ 是一个定理. 容易看出

$$\mathrm{ap}(\lambda n.\, \mathrm{Vec}(A, n), +\text{-assoc}) : \mathrm{Vec}(A, n + (m + o)) = \mathrm{Vec}(A, (n + m) + o)$$

在进行这类证明时, 可以使用命题 3.2 的依值版本, 证明一致:

命题 3.1.1: 对于 $x, y : X$ 和 $f : (x : X) \to Y(x)$, 有 $(p : x =_X y) \to f(x) =_{\mathrm{ap}(Y,p)} f(y)$.

可以看出, 原本的相等类型就是依值相等的特例. 从原本的相等到依值相等的推广类似于从函数类型到 Π 类型的推广, 是很自然的. 本讲义在这之后将不再区分两者.

立方类型论和同伦类型论有一个至关重要的区别就是后者并没有这样的异质相等, 它顶多有 Σ 类型的相等, 和异质相等虽然能做的事情很接近却有着本质的区别.

例子 3.1.1: 考虑 $a, b, c, d : \bullet =_A \bullet$ 四个相等, 其中 $\bullet : A$ 是一个无关紧要的常量. 乍看之下我们只能描述 $a =_{\bullet=\bullet} b$ 这样的相等, 但除此之外我们还能写出如下类型:

$$a =_{\lambda i.c \ @ \ i=d \ @ \ i} b$$

检查一下也没有问题: 令 $t :\equiv \lambda i.\, c \ @ \ i = d \ @ \ i$, 那么不管是 $t(0)$ 还是 $t(1)$ 都等于 $\bullet = \bullet$, 但这个函数偏偏就不是常函数, 它在 i 不为常量时有一个不同的值.

数学直觉好的读者可能会提前意识到这是个方块, 但看不出来也不用着急, 后面会介绍如何解读这样的类型.

3.2. 类型转换

最重要的是我们需要如下「类型转换」操作, 该操作本来是 J 规则的推论, 但是对于立方类型论的计算来说至关重要, 比 J 更基本:

$$\frac{A : X =_{\mathcal{U}} Y}{\mathrm{coe}_A : X \to Y}$$

也可也写作:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}}{\mathrm{coe}_A : A(0) \to A(1)}$$

这两个版本的定义是等价的, 但是语法是不一样的, 后文将倾向于使用后者 (但不代表不会用到前者! 请读者自行处理这个简单的重载), 即会使用

$$\mathrm{coe}_{\lambda x.\ -_{\text{坨}}}(u)$$

而不是

$$\mathrm{coe}_{\langle x \rangle\ -_{\text{坨}}}(u)$$

注意我们现在还没给出这个函数的实现, 我们只是在畅想有了它之后的美好未来. 如果有了它, 可以证明相等类型的传递性和对称性.

命题 3.2.1: 对于 $x, y, z : X$ 和 $p : y =_X z$, 有 $x =_X y \to x =_X z$.

证明: 根据 p 的类型, 我们知道 y 和 z 命题相等. 由命题 3.2 可知, $x =_X y$ 和 $x =_X z$ 这两个类型命题相等 (令 $f :\equiv \lambda o.\, x =_X o$), 再借助转换操作将前者转换成后者即可.

因此可以得到如下证明: $\mathrm{coe}_{\mathrm{ap}(\lambda o.x=_X o,p)}$ □

命题 3.2.2: 对于 $x, y : X$ 和 $p : x =_X y$, 有 $y =_X x$.

证明: 根据 p 的类型, 我们知道 x 和 y 命题相等. 由命题 3.2 可知, $x =_X x$ 和 $y =_X x$ 这两个类型命题相等. 根据命题 3.1 可知, $x =_X x$ 是可证的, 再借助转换操作将这个转换成后者即可. □

练习 3.2.1: 给出命题 3.2.2 的证明表达式.

类型转换的操作目前看来还是公理, 因为我们没给它的具体实现. 事实上, 对于某些类型, 它的实现还是很简单的:

例子 3.2.1:

- 积类型:

$$\mathrm{coe}_{\lambda x.A\times B}(u) \equiv \langle \mathrm{coe}_A(u.1), \mathrm{coe}_B(u.2)\rangle$$

- 函数类型需要一种反转的操作, 即 $\mathrm{coe}_A^{-1} : A(1) \to A(0)$, 这在大多数具体实现中都是存在的, 参见下文关于 Descartes 立方类型论的描述.

例子 3.2.2:

- 没有参数的归纳类型 D:

$$\mathrm{coe}_{\lambda x.D}(u) \equiv u$$

  虽然还没介绍但是这对于高阶归纳类型也是一样.
- 对于宇宙 $\mathcal{U}$, 行为和 D 一致.

使用 J 规则实现的 coe 操作还满足如下计算规则:

$$\mathrm{coe}_{\mathrm{idp}}(u) \equiv u$$

我们这个版本的 coe 能不能满足这个等式还是个未知数. 事实上,「构造一个立方类型论使得该等式成立」是个开放问题. 该等式又叫做正则性. 但这个等式的命题形式一般是成立的. 这也是在给出 coe 定义时需要时刻注意的一点: 必须确保能构造出一条路径

$$p : \mathrm{coe}_{\mathrm{idp}}(u) = u$$

这也是在定义 Π, Σ 等依值类型的 coe 实现时必须的.

一个简单的例子是 Descartes 立方类型论 (这是立方类型论的一个版本, 还有很多不同的其它版本) 中的 coe 操作, 类型如下:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U} \qquad r, s : \mathbb{I}}{\mathrm{coe}_A^{r \rightsquigarrow s} : A(r) \to A(s)}$$

换言之它将原本的 0 和 1 端点都改成了参数. 它满足如下计算规则 (这也是一类似正则性的性质):

$$\mathrm{coe}_A^{i \rightsquigarrow i}(u) \equiv u$$

这样的话便有如下证明:

$$\langle i \rangle \mathrm{coe}_A^{i \rightsquigarrow 1}(u) : \mathrm{coe}_A^{0 \rightsquigarrow 1}(u) =_A u$$

另外, 这个设计也非常巧妙地解决了 coe^{-1} 的定义, 只需交换两参数即可. 在 Agda 的立方类型论标准库中, 该证明叫做 `transportRefl`.

4. 面映射

本节给出一些技术性的定义, 可能有些枯燥, 推荐带着丰富的空间想象力阅读. 如果实在是有看图的需求, 可以看笔者的英语教程 [3].

立方类型论中, $i : \mathbb{I} \vdash u : X$ 对应一个 X 中的一维路径, 可以认为 $i : \mathbb{I}$ 是它的「坐标轴」, 而在语境中再增加一个变量 $j : \mathbb{I}$ 对应了增加了一个维度的操作, 比如 $i, j : \mathbb{I} \vdash u$ 就是一个二维的方块, 我们可以取它的边, 比如 $u[i \mapsto 0]$ 就是它在 i 坐标轴的左边, 由于 u 是二维图形, 它的一个边就是一维的路径, 而很显然 $u[i \mapsto 0]$ 中不再具有变量 i, 只有 j, 符合一维的条件.

类似地, 若 j 坐标轴是从下往上的话, 那么 $u[i \mapsto 0][j \mapsto 0]$ 就是它的左下角. 为了描述这种「取出一个面」的操作, 我们引入类型 $\mathbb{F} : \mathcal{U}$, 构造规则如下:

$$\top : \mathbb{F} \qquad \bot : \mathbb{F}$$

$$\frac{\varphi : \mathbb{F} \qquad \psi : \mathbb{F}}{\varphi \wedge \psi : \mathbb{F} \qquad \varphi \vee \psi : \mathbb{F}}$$

$$\frac{i : \mathbb{I}}{i = 0 : \mathbb{F} \qquad i = 1 : \mathbb{F}}$$

注意这里面的 $= 0$ 是被视为关键字的, 这个 $=$ 符号不是一个二元运算符, 应该认为 $= 0$ 是一个整体, 不要和相等类型搞混了. 其中:

- $i = 0, i = 1$ 表示在 i 变量对应的坐标轴中取出两端点,
- $\varphi \wedge \psi$ 表示取出 φ 和 ψ 的交集,
- $\varphi \vee \psi$ 表示取出 φ 和 ψ 的并集,
- $\bot$ 表示取出空集, 一般是在遇到想要取 $i = 0 \wedge i = 1$ 的时候会变成这种情况, 不会有直接取空的需求,
- $\top$ 表示取出全集, 也就是啥也不干.

我们称 $\mathbb{F}$ 类型的实例为「语境限制」. 在某些文献中它也会被称为「余纤维化」, 但是这个名字本身还有一个更广义的数学中的含义, 因此我们暂时避免使用它. 在部分立方类型论的变种里, 还有更丰富的表达式, 比如 $i = j$ 这种描述两个维度的对角线的操作, 就是前面说的 Descartes 立方类型论里面的至关重要的一环.

我们可以看出, $\mathbb{F}$ 类型像是一种命题宇宙, 它的实例对应了一些命题, 而且对这些命题我们可以取合取, 析取, 还有真命题和假命题等等. 但它不是常规的类型论意义上的命题宇宙, 因为它的实例不是类型. 但在范畴语义中, $\mathbb{F}$ 对应的是**子对象分类子**的一个**子对象**, 换言之它对应命题宇宙的一个类似子类型的东西, 这性质比它在语法上的性质好得多.

语境限制的表达式上有常规的替换操作, 但要注意如下规则:

$$(i=1)[i\mapsto 1]\equiv\top \qquad (i=1)[i\mapsto 0]\equiv\bot$$
$$(i=0)[i\mapsto 1]\equiv\bot \qquad (i=0)[i\mapsto 0]\equiv\top$$

其余情况和常规的替换操作一致, 不再赘述.

4.1. 对语境进行限制

立方类型论的类型规则中, 对于 $\varphi:\mathbb{F}$, 可以得到一个对语境的函子, 为了方便, 直接将「对于语境 Γ 应用这个函子」记作 Γ,φ, 于是可以写出如下表达式:

$$\Gamma,\varphi\vdash\mathcal{J}$$

其中 $\varphi:\mathbb{F}$. 感性上, 这个语境指的是 φ 成立时, $\Gamma\vdash\mathcal{J}$, 但由于我们要允许 φ 使用 Γ 里的变量, 所以把 φ 写在 Γ 后面比较符合阅读顺序. 我们规定:

- $\Gamma,\top$ 和 Γ 相等,
- $\Gamma,\bot$ 语境下任何等式成立,
- $\Gamma,\psi\wedge\varphi$ 和 Γ,ψ,φ 相等.

然后再规定, 对于 $r\in\{0,1\}$:

$$\frac{\Gamma\vdash\mathcal{J}[i\mapsto r]}{\Gamma,i=r\vdash\mathcal{J}}$$

例子 4.1.1: 对于 $r,r'\in\{0,1\}$, 有

$$\frac{\Gamma\vdash\mathcal{J}[i\mapsto r,j\mapsto r']}{\Gamma,i=r\wedge j=r'\vdash\mathcal{J}}$$

这样的话, 我们可以得到语境限制之间的逻辑蕴涵关系. 严谨的写法, 直接写 $\vdash\top$ 就完成了定义.

例子 4.1.2: 若在语境 Γ,φ 中, 语境限制 ψ 变成了 $\top$, 那么认为

$$\Gamma,\varphi\vdash\psi$$

定义 4.1.1: 语境限制之间的相等定义如下:

$$\frac{\Gamma,\varphi\vdash\psi \qquad \Gamma,\psi\vdash\varphi}{\Gamma\vdash\varphi\equiv\psi}$$

在下文中, 若 Γ,φ 中的 Γ 不重要, 会直接写作 φ.

对于 $\varphi, \psi : \mathbb{F}$, 根据我们对逻辑的理解, 有:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$$

练习 4.1.1: 给出 $\wedge$ 相关的蕴涵规则.

定理 4.1.1: 若 $\varphi \vdash \psi$, 那么对于任意判断 $\mathcal{J}$, 都有

$$\frac{\psi \vdash \mathcal{J}}{\varphi \vdash \mathcal{J}}$$

怎么理解这件事呢? 从几何的角度出发比较直观: 语境限制之间的蕴含关系对应了形状之间的包含关系. 若 φ 蕴含 ψ, 那么 φ 对应的形状一定完全被 ψ 的形状包含, 换言之 ψ 对应一个更大的形状, 在更大的形状上 $\mathcal{J}$ 成立, 那么自然在更小的形状上也成立.

可以看出, 语境限制本身的蕴涵关系和它们作用在语境上后对判断之间的蕴涵关系的影响, 是反变 (或者说逆变) 的.

4.2. 立方子类型

我们引入如下类型来描述某类型「满足某些等式」的「子类型」, 注意这不是**子类型多态**意义上的子类型, 我们要求显式的转换:

$$\frac{A : \mathcal{U} \qquad \varphi \vdash u : A}{\{A \mid \varphi \mapsto u\} : \mathcal{U}}$$

这里实际上是简写, 这个大括号里面还可以写多个这样的式子, 比如

$$\{A \mid \varphi \mapsto u, \psi \mapsto v\}$$

也是可以的. 这样的类型我们称之为**立方子类型**, 用于和一般的子类型区分. 它的构造规则, 便是要求实例满足这个条件, 然后转换过来:

$$\frac{v : A \qquad \varphi \vdash u \equiv v : A}{\mathrm{inS}(v) : \{A \mid \varphi \mapsto u\}}$$

如果有多条规则, 就是要求满足所有的条件. 消去规则就是取出这个实例, 且会根据条件化简:

$$\frac{v : \{A \mid \varphi \mapsto u\}}{\mathrm{outS}(v) : A \qquad \varphi \vdash u \equiv \mathrm{outS}(v) : A}$$

构造规则和消去规则都是一元的, 满足显然的 β, η 规则, 不再赘述. 我们接下来将会假设我们的代码中会处处隐式地插入 inS 和 outS 的调用来满足类型规则, 即「写作子类型, 读作自动插入转换」.

立方子类型可以嵌套:

$$\{\{A \mid \varphi \mapsto u\} \mid \psi \mapsto v\}$$

在有了隐式转换后, 这和 $\{A \mid \varphi \mapsto u, \psi \mapsto v\}$ 没有本质上的区别.

可以看出, (依值) 相等类型的类型规则可以用子类型表达:

$$x =_A y \coloneqq (i : \mathbb{I}) \to \{A(i) \mid i = 0 \mapsto x, i = 1 \mapsto y\}$$

然后它的构造规则和消去规则和计算规则都会自动继承自子类型的规则. 此时我们已经有了充分的工具解读例子 3.1.1 了, 首先将该类型转化为立方子类型的描述:

$$(i : \mathbb{I}) \to \{(c \mathbin{@} i =_A d \mathbin{@} i) \mid i = 0 \mapsto a, i = 1 \mapsto b\}$$

我们发现这还能再展开一层:

$$(i : \mathbb{I}) \to \left\{\underbrace{(j : \mathbb{I}) \to \{A \mid j = 0 \mapsto c \mathbin{@} i, j = 1 \mapsto d \mathbin{@} i\}}} \mid i = 0 \mapsto a, i = 1 \mapsto b\right\}$$

调整一下内外两层子类型, 会变成这样:

$$(i, j : \mathbb{I}) \to \left\{A \mid \underbrace{j = 0 \mapsto c \mathbin{@} i}, \underbrace{j = 1 \mapsto d \mathbin{@} i}, \underbrace{i = 0 \mapsto a \mathbin{@} j}, \underbrace{i = 1 \mapsto b \mathbin{@} j}\right\}$$

可以看出, 这是一个二维的相等, 或者说是一个方块, 有上下左右四条边, i 和 j 分别是两个坐标轴. 换言之, 借助子类型的视角, 我们能看出依值相等类型能表达这种高维图形.

练习 4.2.1: 证明以上几个类型在隐式转换下等价.

使用立方子类型定义的相等类型又叫「扩张类型」. 注意扩张类型指前面的 $\mathbb{I}$ 参数加上后面的立方子类型这个整体:

$$x =_A y \coloneqq \overbrace{(i : \mathbb{I}) \to \underbrace{\{A(i) \mid i = 0 \mapsto x, i = 1 \mapsto y\}}_{\text{立方子类型}}}^{\text{扩张类型}}$$

扩张类型和立方子类型有重要的性质上的不同, 下一节将会介绍.

前面说的 Descartes 立方类型论的 coe 操作也可以用这种方式一次性描述它的类型和化简:

$$\mathrm{coe}_A^{r \rightsquigarrow s} : (u : A(r)) \to \{A(s) \mid r = s \mapsto u\}$$

这实在是太方便了!

5. 双层类型论

到现在为止我们基本完成了立方类型论的描述, 看起来这是个振奋人心的类型系统, 拥有丰富的功能, 但是还有一些细节没有说清楚, 那就是关于 coe 这个操作.

这个操作的本质是什么? 它是一个函数吗? 乍看之下它是一个内部对每种类型分别给出实现的函数, 那么它对于相等类型是如何实现的? 换言之, 相等的传递性证明化简到典范形式后是什么样的? 它对 $\mathbb{I}, \mathbb{F}$ 还有立方子类型这些类型也有实现吗?

答案是否定的. 事实上, coe 是形成规则上带有的结构 (结构就是能参与计算的性质), 而且不是所有形成规则都有这个性质 — 「具有 coe 结构」的类型叫做「Kan 类型」, 这个结构又叫「Kan 结构」, 它对应一组新的类型论规则, 我们称之为「转换规则」. 而 $\mathbb{I}, \mathbb{F}$ 还有立方子类型都不是 Kan 类型, 这样的类型又叫做「外类型」.

一般来说, 同伦类型论中涉及的一切形成规则都是有 Kan 结构的, 只有立方类型论里新引入的描述类型的工具才会被视为外类型, 例如宇宙和相等类型都是 Kan 类型, 立方子类型等立方类型论中的工具是外类型. 扩张类型是立方类型论对相等类型的升级, 它也是 Kan 类型.

为了区分外类型和 Kan 类型, 我们将宇宙一分为二, 变成 Kan 类型宇宙 $\mathcal{U}_1$ 和外类型宇宙 $\mathcal{U}_0$, 这个符号借鉴了 [4]. 于是我们可以将 coe 的类型写作:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1}{\mathrm{coe}_A : A(0) \to A(1)}$$

这样的话 $\mathrm{coe}_{\lambda x.\{A \mid \ldots\}}$ 就直接类型不合法了, 这是好的. 立方子类型本质上是用来描述 Kan 类型的子类型的, 因此改为

$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi \vdash u : A}{\{A \mid \varphi \mapsto u\} : \mathcal{U}_0}$$

剩余的 $\mathbb{I}, \mathbb{F}$ 直接扔进 $\mathcal{U}_0$, 不再赘述. 对于 Π, Σ 类型, 规定它们在这两个宇宙中各自闭合. 这样的话, 从两个宇宙之间游走的方式就很有限了, 比如使用立方子类型的规则等.

值得注意的是, 相等类型是 Kan 类型, 但是把它解构成立方子类型的表示后, 就不再是 Kan 类型了, 因此这里需要一个 Tarski 宇宙的技巧来解决这个问题. 这个事情不是很重要, 因为我们完全可以不用立方子类型来代替相等类型.

在语义中, 若一个立方子类型里的 $\mathbb{I}$ 恰好被它前面的参数绑定, 换言之如果它等价于一个扩张类型, 那么它是 Kan 类型, 因为我们可以赋予它 coe 操作的定义. 但是在语法上这不好处理: 如果一个类型的 Kan 性质的判定算法要检查它里面的变量, 会使得这个算法很低效而且很难写, 而直接使用宇宙来判定就简单得多, 实际使用时我们也总是可以手动将符合条件的立方子类型转换为扩张类型.

另外, 这个配置下会导致 $\mathbb{I} \to A$ 这个类型在 $A : \mathcal{U}_1$ 时不合法, 因为 $\mathbb{I}$ 和 A 不一样, 是外类型. 但实际上我们是可以赋予 $\mathbb{I} \to A$ 以 Kan 结构的, 把它当成平凡的相等类型就可以了. 一种优雅的解决方法是将 $\mathbb{I}$ 隔离进第三个宇宙 $\mathcal{U}_I$, 令 $\mathcal{U}_I : \mathcal{U}_0$, 然后再允许

$$\frac{i : \mathbb{I} \vdash A : \mathcal{U}_1}{(i : \mathbb{I}) \to A : \mathcal{U}_1}$$

即可. 这应该是 Evan Cavallo 想的, 参见[2].

宇宙分两层, 允许有限交互的类型论叫双层类型论. 关于双层类型论还有很多细节和延伸话题, 比如 Voevodsky 提出的同伦类型系统便是一种双层类型论, 它引入了严格的相等类型 (也就是 $x = x$ 只有唯一证明的相等类型, 不像我们的相等类型中可以包含非平凡的数据), 能大幅增强同伦类型论的表达力, 这里不多赘述.

6. 复合操作

我们来看看相等类型的转换操作到底需要构造个啥出来, 最好的方法就是把需要构造的表达式先写出来, 然后再查成分. 写出来是这样:

$$\mathrm{coe}_{\lambda x.a =_A b} : (a =_A b)[x \mapsto 0] \to (a =_A b)[x \mapsto 1]$$

其中需要如下数据 (就是依值相等类型的基本要素):

- $x : \mathbb{I} \vdash A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1$,
- $x : \mathbb{I} \vdash a : A(0)$,
- $x : \mathbb{I} \vdash b : A(1)$.

显而易见的, A 现在是一个二维的类型! 把 x 参数化后, 可以这样看:

[2] https://github.com/agda/agda/pull/5439

- $A : (x, y : \mathbb{I}) \to \mathcal{U}_1$ 是一个方块,
- $a : (x : \mathbb{I}) \to A(x, 0)$,
- $b : (x : \mathbb{I}) \to A(x, 1)$,
- coe 操作的参数的类型为 $a(0) =_{\lambda y.A(0,y)} b(0)$,
- coe 操作的返回值的类型为 $a(1) =_{\lambda y.A(1,y)} b(1)$.

注意这里出现了 $A(x,0), A(x,1), A(0,y), A(1,y)$ 这样的类型, 这分明就是 A 这个正方形的四条边! 于是这些数据可以被画在图里:

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\text{参数}}{\longrightarrow} & \\ a(0) & & b(0) \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ a(1) & \dashrightarrow & b(1) \\ & \underset{\text{返回值}}{} & \end{array}$$

我们需要的操作是: 给定如上的方块的三条边, 构造出第四条边. 这个操作可以被推广到高维: 给定 n 维立方体的全部 $n-1$ 维边中去掉一个, 构造出那个被去掉的边. 这个操作我们称之为「复合操作」.

一般来说, 在「参数」那个位置的边叫做「底面」, 尽管这里它是被画在上面的. 这是因为复合操作一般被描述为「盖上盖子」, 而能被盖上盖子的东西一般开口是朝上的. 而画图的时候, 由于人阅读的顺序一般是从上往下的, 因此本文选择将参数放在上面.

例子 6.1:
- 令 $a :\equiv$ idp, 那么这个复合操作就对应了相等类型的传递性.
- 令 $b :\equiv$ 参数 $:\equiv$ idp, 那么这个复合操作就对应了相等类型的对称性.

立方类型论将这种操作的一种简化形式作为 Kan 类型的定义的一部分引入类型论, 然后结合 coe 把以上操作模拟出来. 以上需要的操作又叫做异质复合, 简化的操作叫做复合或者同质复合.

形式化地定义同质复合需要有一个办法来描述上面那个方块的三条边, 然后将这个描述本身作为一个 A 类型的实例引入即可. 这需要引入一种新的外类型来描述, 叫做「部分类型」.

6.1. 部分类型与复合的形式化定义

部分类型的形成规则如下:

$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F}}{\mathrm{Partial}(\varphi, A) : \mathcal{U}_0}$$

这对应单纯形的理论中的角形 – 如果读者熟悉抽象同伦论的话. 它的意思就是在 φ 指定的一组边上给出定义的类型, 并且这些值的类型为 A. 这一事实在构造规则中充分体现, 如下所示:

$$\frac{\begin{array}{cc} \varphi_0 \vdash u_0 : A & \varphi_1 \vdash u_1 : A \qquad ... \\ \varphi_0 \wedge \varphi_1 \vdash u_0 \equiv u_1 : A & \qquad ... \end{array}}{\{\varphi_0 \mapsto u_0, \varphi_1 \mapsto u_1, ...\} : \mathrm{Partial}(\varphi_0 \vee \varphi_1 \vee ..., A)}$$

为方便起见, 部分类型的实例被称为部分元素. 这个术语来自 Agda, 在立方类型论原版论文中它有一个令人不忍直视的名字, 我们避开不提. 构造规则中,

- $\varphi_0 \vdash u_0 : A$ 这样的表达式就是一条边, 维度任意, 这是第一行想表达的信息,

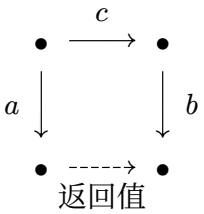
- 此外我们需要需要确保任何两条边在相交处都是相等的, 这是第二行表达的信息,
- 若两条边不相交, 它们对应的 $\varphi_i \wedge \varphi_j$ 等价于 $\bot$, 而我们知道在这个限制下任何等式都成立, 因此不相交的边之间不需要满足任何等式即合法,
- 若给定两条完全重合的边, 即 $\varphi_i \equiv \varphi_j$, 那么它们必定得是无条件相等的.

部分类型和立方子类型的形成规则需要给出完全相同的数据, 但它们的构造规则却不同: 立方子类型需要给出 A 完整的实例, 并且在一组边上满足给定的等式, 而部分类型是只需要给出这一组边上的值即可. 这两者都是定义立方类型论中的构造的有力工具.

有了部分类型, 我们就可以定义同质复合操作的类型了:

$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = 0, A)}{\mathrm{hcom}(u) : \{A \mid \varphi \mapsto u(1)\}}$$

这个类型有点复杂, 尤其是那个参数 $u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = 0, A)$, 我们结合二维的情况展开解读一下. 对于前文说过的二维复合, 我们有如下输入:



其中 $c, a, b : \mathbb{I} \to A$ 都是线段, 然后我们已知这三条线段在相交处都是相等的.

练习 6.1.1: 写出 a, b, c 之间有哪些等式需要满足, 以及复合操作返回的表达式有哪些等式需要满足.

此时 $i : \mathbb{I}$ 对应竖着从上到下的方向, 因此 $i = 0$ 这个条件就对应了正上方的参数 c. 而我们需要左右两边, 因此这里语境中还需要提供一个新的参数 $j : \mathbb{I}$ 表示从左到右的坐标轴, 然后令 $\varphi :\equiv j = 0 \vee j = 1$, 这个意思就是参数中还需要提供这两条边. 于是有:

$$u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(j = 0 \vee j = 1 \vee i = 0, A)$$

然后我们在给出 u 时, 就会使用构造规则:

$$u :\equiv \lambda i. \begin{cases} j = 0 \mapsto a(i) \\ j = 1 \mapsto b(i) \\ i = 0 \mapsto c(j) \end{cases}$$

注意这里的函数应用: 对一个类型为 $\mathbb{I} \to A$ 的值, 我们应当把它视为一个可以放在任意位置的直线, 因为对它来说坐标轴是个参数, 而不是一个固定的值. 把它摆放在某一条坐标轴上的动作就对应着函数应用. 这个思考方式在笔者的另一篇英文笔记 [3] 中给出了更详细的例子, 包括三维的情况.

在给出了这样的数据后, 我们再把这个 u 传给复合操作, 并且最终得到的值的类型也是 A. 若 φ 为真时, 也就是在某些替换操作下使得 $j = 1$ 或者 $j = 0$ 之一被满足后, 我们就直接返回这个侧面在 $i = 1$ 的那一端, 也就是 $u(1)$, 然后再用隐式转换把这个「完整的部分类型」取出来.

由于复合的设计是针对任意维度的, 因此类型规则必须定义得足够通用才行, 但我们在用的时候需要先想清楚维度的数量, 然后指定 φ. 这里也可以看出, 我们不一定需要指定全部的侧面, 不需

要的侧面直接不给也可以. 这个性质在泛等公理的构造中非常重要, 同时也是立方类型论主要的性能缺陷的来源, 这些在后文都会展开描述.

此外, 由于 φ 可以通过 u 的具体值推导出来, 因此写的时候一般是直接给出 u, 然后用类型推导求解出 φ.

异质复合就是一个简单的依值类型推广:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = 0, A(i))}{\mathrm{com}(u) : \{A(1) \mid \varphi \mapsto u(1)\}}$$

用 hcom + coe 来定义 com 的具体构造就省略了, 大体思路是在 $A(1)$ 这个类型上进行复合, 然后把给定的 $A(0)$ 类型的实例通过 coe 转化为 $A(1)$ 类型.

结合前面的例子, 从复合的类型中可以看出, 它有如下计算规则:

$$\mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{\top \mapsto m\}) \equiv m$$

换言之复合是可以被消除的, 消除的前提就是让 $\varphi \equiv \top$. 对应的几何描述是: 若我需要复合的立方体的全部侧面都由同一个值指定, 那么复合出来的结果就是这个值.

在 Descartes 立方类型论中, 复合也有类似 coe 的推广, 即从 0 到 1 改成从 r 到 s, 其中 $r, s : \mathbb{I}$ 是任意表达式:

$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad r, s : \mathbb{I} \qquad u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = r, A)}{\mathrm{hcom}^{r \rightsquigarrow s}(u) : \{A \mid \varphi \vee r = s \mapsto u(s)\}}$$

此时, $\mathrm{hcom}^{0 \rightsquigarrow 1}$ 就对应常规的复合, 而 $\langle i \rangle \mathrm{hcom}^{i \rightsquigarrow 1}$ 给出的则是复合操作的完整立方体 (而不仅仅是顶面), 这个操作叫「填充」, 记作 hfill, 它更准确地体现了抽象同伦论里的 Kan 条件. 异质复合如下:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad r, s : \mathbb{I} \qquad u : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = r, A(i))}{\mathrm{com}^{r \rightsquigarrow s}(u) : \{A(s) \mid \varphi \vee r = s \mapsto u(s)\}}$$

令 $\varphi :\equiv \bot$, 我们就不需要给出任何侧面, 也能进行合法的复合. 这种复合被称为「零复合」.

6.2. 复合的计算

除了类型里描述的规则之外, 复合的常规计算规则 (也就是取决于具体类型的计算) 大体类似 coe, 不多赘述, 但是对于归纳类型的规则是不同的. 比如考虑自然数 $\mathbb{N}$, 我们有:

$$\mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{\varphi_i \mapsto \mathrm{zero}\}) \equiv \mathrm{zero}$$
$$\mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{\varphi_i \mapsto \mathrm{suc}(u_i)\}) \equiv \mathrm{suc}(\mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{\varphi_i \mapsto u_i\}))$$

这要求我们在化简复合的时候, 能进行「若每个给定的面都是由同一个构造子生成」这样的判断, 这是比较难实现的, 效率也比较差, 但却是典范性关键的一环.

我们也可以直接摆烂, 归纳类型的 hcom 就当成典范形式了, 这样的归纳类型叫弱归纳类型, 比如 cooltt 编程语言就是这样做的. 它给所有的归纳类型都新增了 hcom 这种形式的典范形式.

这些常规类型上的计算规则使得零复合在类型已知的情况下基本能被化简为底面, 唯一的例外是宇宙 $\mathcal{U}_1$. 如果宇宙上也能进行这样的化简, 那么这个宇宙就是「正则的」, 有正则宇宙的话零复合就可以不管类型直接化简了, 这看起来很美好.

可惜正则性是个非常强的性质, 在 [5] 中, Carlo Angiuli 给出了一个由该化简规则蕴涵的一条非常难以算法化判定的类型论等式. 因此, 在不知道类型的时候, 零复合目前无法被化简, 导致它成了

立方类型论使用者深恶痛绝的对象[3], 因为它们会在计算过程中永远地存在下去, 越堆越多, 无法消除, 就像是一种「内存泄漏」.

在一些立方类型论的文献中 (例如 [6]), 典范的 hcom 记作 fhcom, 可以读作「形式复合」, 这便于区分待计算的 hcom. 在下面我们会看到, 高阶归纳类型上的 hcom 几乎没有任何办法化简, 因此必须全部当成典范形式.

归纳类型的复合的计算有一种巧妙的实现方式, 由 András Kovács 提出. 观察归纳类型和复合的以下几个性质:

- 复合必定要求提供底面, 即 $i = 0$ 的面 (在 Descartes 版本中则是需要提供 $i = r$ 的面),
- 由于部分类型的构造规则, 整个立方体的相交部分必须重合,
- 一般的归纳类型里, 不同的构造子是互斥的 (Conor McBride 的「无混淆原则」).

因此若底面是由某个特定的构造子生成的, 假设形式为 $\mathrm{con}(u_1, u_2, ...)$, 那么侧面也都一定是由这个构造子生成的, 只不过表达式层面上不一定看得出来. 因此我们可以引入辅助运算 uncon, 它满足如下计算规则:

$$\mathrm{uncon}(\mathrm{con}(u_1, u_2, ...)) \equiv \langle u_1, u_2, ... \rangle$$

然后可以这样计算:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{x = 0 \mapsto \mathrm{con}(u_1, u_2, ...), \varphi_1 \mapsto v_1, \varphi_2 \mapsto v_2, ...\}) \equiv \\
&\quad \begin{aligned}
\text{let} \quad & a_1 \coloneqq \mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{x = 0 \mapsto u_1, \varphi_1 \mapsto \mathrm{uncon}(v_1).\, 1, \varphi_2 \mapsto \mathrm{uncon}(v_2).\, 1, ...\}) \\
& a_2 \coloneqq \mathrm{hcom}(\lambda x.\, \{x = 0 \mapsto u_2, \varphi_1 \mapsto \mathrm{uncon}(v_1).\, 2, \varphi_2 \mapsto \mathrm{uncon}(v_2).\, 2, ...\}) \\
& a_3 \coloneqq ... \\
\text{in} \quad & \mathrm{con}(a_1, a_2, ...)
\end{aligned}
\end{aligned}$$

这个计算规则看起来很恐怖, 但是写在编译器里面是很直观的, 整个流程用一个循环里面新建语法树节点就可以实现, 而不需要对每个侧面进行形式的判断, 而且如果侧面没有用到的话, 也不会触发计算, 因此性能上是很不错的.

由于所有的 Kan 类型都需要支持 coe 操作, 这也意味着所有的 Kan 类型都需要支持复合操作. 到此我们终于可以给 Kan 类型以完整的定义了:

定义 6.2.1: Kan 类型是指那些支持 coe 和复合操作的类型.

还记得前面提到过同伦类型论中所有的形成规则都对应 Kan 类型吗? 这样的话宇宙也必须支持复合. 宇宙上的复合是非常麻烦的, 因为每个类型上的复合操作都相当于是新增了一种该类型的构造规则, 在宇宙上, 这就等于说是给 $\mathcal{U}_1$ 这个类型加了新的实例! 这意味着出现了新的形成规则 (记作 Hcom), 我们还要给这个新的形成规则加上构造规则和消去规则, 这个类型也必须是 Kan 类型, 因此它也要支持复合和 coe.

这个事情还比较复杂, 有多种解决方法. 我们先来看看泛等公理的证明是怎么构造的. 不过在这之前, 我们先聊聊复合操作的语义.

6.3. 复合的语义与同伦扩张性质

对类型论的语义学完全不感兴趣的读者请跳过这一节.

[3] 参见 Favonia 的讲座 https://cse.umn.edu/cs/feature-stories/nullable-compositions-talk

在立方类型论的语义中, 复合操作对应所谓的「Kan 条件」, 即同伦扩张性质. 在抽象同伦论中, 这往往是通过单纯复形叙述的, 它说对于任何角形出发的映射 $f : \Lambda \to X$, 都能填充为完整的映射 $\text{填}(f) : \Delta \to X$, 且后者限制到角形上等价于前者, 即

$$\text{填}(f)|_{\Lambda} = f$$

立方类型论的复合操作给出的事情几乎是完全相同的, 只不过有如下区别:

- 单纯形换成了方形,
- 角形换成了部分元素,
- 填 操作不再是一个抽象的条件, 而是一个构造子.

用形象的符号来描述的话, 就是说对于任何映射 $f : \sqcup \to X$, 都存在一个映射 $\text{填}(f) : \square \to X$, 满足类似的限制条件:

$$\text{填}(f)|_{\sqcup} = f$$

用我们已经介绍过的语境限制的话来说, 就是:

$$\sqcup \vdash \text{填}(f) = f$$

要读懂这句话, 需要对这些符号建立感性的理解, 而且需要一个在拓扑学和范畴论中都非常重要的直觉: 图表在一定程度上可以用态射描述.

例子 6.3.1: 在一个拓扑空间 X 上找一个圆周, 就相当于是将圆周这个空间连续地映射到 X 上, 即 $S^1 \to X$. 这个映射的值域就是我们要找的圆周, 因为这个映射本身是连续的, 意味着它不破坏圆周本身的形状.

类似地还可以用这种方式描述其他的图形.

例子 6.3.2: 在空间 X 上找一条道路 (也就是有方向的线段), 就对应了标准的有向线段空间到 X 的映射 $\mathbb{I} \to X$. 这正是立方类型论对道路的定义.

例子 6.3.3: 在范畴 $\mathcal{C}$ 中画一个任意形状的交换图, 就相当于是将这个交换图的形状本身作为范畴 $\mathcal{D}$, 然后考虑一个函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. 函子保持态射的复合, 因此函子本身的性质保证了图表的交换性.

这里对 $\mathcal{D}$ 的定义有些抽象, 我们举一些例子. 熟悉范畴论的读者建议跳过. 在范畴论中, 举出来的例子本身都有例子可是常识.

例子 6.3.4: 对于 $\mathcal{C}$ 中的交换图:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

我们可以定义一个范畴 $\mathcal{D}$, 包含对象 A', B', C' 以及态射 $f' : A' \to B', g' : B' \to C'$ (这些数据就是从上述交换图中抠下来的), 然后再允许 f' 和 g' 的复合存在, 但这个复合出来的态射本身不包含额外的信息, 仅仅作为这两个态射的复合存在而存在. 那么函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 包含如下数据:

$$F(A'), F(B'), F(C'), F(f'), F(g')$$

这就对应了上述交换图中的所有数据.

上述例子过于平凡, 因为那个交换图交换了个寂寞, 下面是一个交换条件非平凡的例子:

例子 6.3.5: 对于 $\mathcal{C}$ 中的交换图:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{c} & B \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b} \\ C & \xrightarrow[d]{} & D \end{array}$$

它对应的范畴 $\mathcal{D}$ 包含如下数据:

- 对象 A', B', C', D',
- 态射 $a' : A' \to C', b' : B' \to D', c' : A' \to B', d' : C' \to D'$ 以及这些态射的复合,
- 满足 $d' \circ a' = b' \circ c'$.

可以看出范畴 $\mathcal{D}$ 就是正好能画出上述交换图的范畴, 然后函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 包含的数据就是上述交换图中的所有数据.

而在我们的例子当中, $f : \sqcup \to X$ 就是说 f 描述了一个类似 $\sqcup$ 的形状, 也就是用部分元素描述的一个不完整的方形, 而 $\text{填}(f) : \square \to X$ 就是说 $\text{填}(f)$ 给出了上述方形的完整版. 我们的立方体复合操作给出的是那个缺失的顶面, 而在这之上加一些简单的技巧就可以得到一个完整的立方体.

这件事情, 也可以画为交换图 (可能还需要再结合预层模型才能充分理解下图中的那个满射, 它又叫形式丛, 可以理解为类型 X 的语义), 出自 [7]:

$$\begin{array}{ccc} \sqcup & \xrightarrow{f} & \Gamma, X \\ \big\downarrow & \overset{\text{填}(f)}{\nearrow} & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_X} \\ \square & \xrightarrow[\theta]{} & \Gamma \end{array}$$

其中 θ 代表的是 f 剔除掉 X 的实例后剩下的信息 – 上图中, 最外圈是我们的输入数据, 而所谓的「Kan 填充操作」, 也就是我们复合操作的语义基础, 就从这些数据输出其中的对角线态射.

我们分析一下输入数据. 理想情况下我们需要的是在语境 Γ 中一个类型为 X 的部分元素, 形状由 $\sqcup$ 指定. 但我们给出两个态射 f, θ 来共同指定这部分信息:

- θ 告诉我们, 这个部分元素中语境的部分是完整的,
- f 告诉我们, 现在我们有一个部分元素, 但这个部分元素包含了整个语境和 X (注意我们本来是只想关心 X 那部分的, 前面是多余的),

- 整个交换图的交换条件告诉我们, f 中多余的部分和 θ 吻合.

这个填充条件实际上是左边这个 $\sqcup \hookrightarrow \square$ 态射的性质, 满足这种性质的态射叫做「余纤维化」, 而我们在代码中描述这种态射的语法就是语境限制.

这里的性质实际上是同伦扩张提升性质, 因为它同时做了扩张和提升两件事情, 左边的态射在做扩张, 右边的态射在做提升, 而这两个操作是无法割裂开的, 是同时进行.

7. 泛等公理

要定义泛等公理需要先给出等价 $A \simeq B$ 的定义. 我们把这个定义拆分成两部分:

$$A \simeq B :\equiv (f : A \to B) \times \mathrm{isEquiv}(f)$$

然后我们需要定义 $\mathrm{isEquiv}(f)$, 也就是「一个函数何时是一个等价」这一命题. 这个就是同伦类型论的内容了, 读者应该已经熟悉, 不熟悉也没有关系, 假装自己知道这个类型就可以了, 后面不会用到这个具体的构造. 我们跳过动机直接给出一个比较经典的版本:

定义 7.1 (可缩纤维等价):

$$\begin{aligned}\mathrm{isContr}(A) &:\equiv (a : A) \times ((b : A) \to a =_A b)\\ \mathrm{fiber}(f, b) &:\equiv (a : A) \times f(a) =_B b\\ \mathrm{isEquiv}(f) &:\equiv (b : B) \to \mathrm{isContr}(\mathrm{fiber}(f, b))\end{aligned}$$

除此之外还有 András Kovács 推荐的半伴随等价, 但这些不同的定义起到的作用都是一样的, 只是处理起来手感不同, 对性能也有一定影响.

以下是几个读者不需要知道证明细节的引理, 帮助具有一定类型论背景的读者熟悉等价的性质:

引理 7.1 (研究生引理): 若 A 和 B 同构, 即存在 $f : A \to B, g : B \to A$ 以及

$$\begin{aligned}p &: (x : A) \to g(f(x)) =_A x\\ q &: (x : B) \to f(g(x)) =_B x\end{aligned}$$

那么 $\mathrm{isEquiv}(f)$ 成立, 换言之 $A \simeq B$ 成立.[4]

除此之外, isEquiv 还必须是命题, 因此不能直接用同构代替等价.

引理 7.2: 给定 $p : A =_{\mathcal{U}_1} B$, 可证明 $\mathrm{isEquiv}\big(\mathrm{coe}_p\big)$. 记

$$\mathrm{coe}_{\simeq} : (p : A = B) \to \mathrm{isEquiv}\big(\mathrm{coe}_p\big)$$

注意 $\mathrm{isEquiv}\big(\mathrm{coe}_p\big)$ 其实可以视为是 $A \simeq B$ 的一种特化的情况, 因为 $A \simeq B$ 按照定义是个 Σ 类型, 因此提供它的实例就是要提供一个 $f : A \to B$ 和 $\mathrm{isEquiv}(f)$. 我们希望能指定这个 f 是 coe_p, 因此直接返回这个特化过后的 Σ 类型.

[4] 参见 https://amelia.how/posts/the-complete-history-of-isotoequiv.html, 对这个引理的名字给出了较为完整的考据. 这里的研究生可能是 Daniel Licata 和 Peter LeFanu Lumsdaine.

练习 7.1: 对于希望熟悉等价的定义的读者, 证明引理 7.2.

提示: 对 p 使用 J 规则, 于是 coe_p 就变成了 $\mathrm{coe}_{\mathrm{idp}}$, 后者的重要性质是什么?

引理 7.3: 对于类型 $A : \mathcal{U}_1$, 有 $A \simeq A$. 该证明记作 idEquiv.

若使用半伴随等价, 这个引理的证明会更加简单.

接下来就是正式的证明了. 证明泛等公理可以分为两步:

1. 构造出 $\mathrm{fromEquiv} : A \simeq B \to A =_{\mathcal{U}_1} B$ 这个函数,
2. 证明该函数是 $\mathrm{coe}_{\simeq}$ 的逆.

第一步最具有类型论上的挑战性, 需要一整套新的规则, 我们详细叙述. 第二步我们只关注它的一个简单推论, 剩下的都是技术细节:

命题 7.1: 对于 $e : A \simeq B$ (这意味着 $e.1 : A \to B$ 是它对应的函数),

$$\mathrm{coe}_{\mathrm{fromEquiv}(e)} =_{A \to B} e.1$$

根据函数外延性, 这也等价于

$$(a : A) \to \mathrm{coe}_{\mathrm{fromEquiv}(e)}(a) =_B e.1(a)$$

7.1. 胶合类型的形成规则

胶合类型是立方类型论中的核心构造, 身兼数职:

1. 它本身的构造能证明泛等公理的第一步, 其余规则证明了第二步,
2. 担任宇宙上的复合操作 Hcom.

它作为一种类型, 形成规则如下:

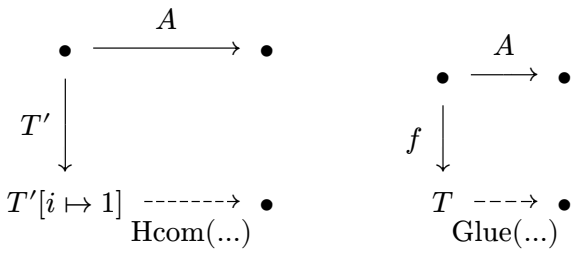
$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad \varphi \vdash e : (T : \mathcal{U}_1) \times (T \simeq A)}{\mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto e.1\} : \mathcal{U}_1}$$

注意这里和复合操作类似, 也是允许多个侧面的, 但为了写法简便, 就只写了一个. 方便起见, 记 $T \coloneqq e.1$. 作为对比, 我们用一种类似的结构写出宇宙上的复合规则:

$$\frac{A : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{F} \qquad \varphi, i : \mathbb{I} \vdash T' : \mathcal{U}_1 \qquad \varphi, i = 0 \vdash T' \equiv A}{\mathrm{Hcom}(\lambda i.\, \{\varphi \mapsto T', i = 0 \mapsto A\}) : \mathcal{U}_1}$$

练习 7.1.1: 对于希望熟悉复合操作的定义的细节的读者, 证明以上定义等价于复合操作在宇宙上的特例.

可以看出, 我们把复合方块的两个侧面从「和底面在相交处兼容的一条道路 $i : \mathbb{I} \vdash T'$」换成了「和底面等价的类型 T」. 为了视觉上的直观, 我们把这两者在常见的情况的图画出来. 令横坐标轴为 j, 且 $\varphi \coloneqq j = 0$ (即忽略横坐标的右边, 不然会导致符号太多, 画出来看不清楚):



注意左边的竖线是道路, 但右边的是等价.

定理 7.1.1: 给定 $A, B : \mathcal{U}_1$ 和 $e : A \simeq B$, 存在 $A = B$.

证明: 由引理 7.3 可得 $\mathrm{idEquiv} : B \simeq B$. 于是可构造证明:

$$\langle i \rangle\ \mathrm{Glue}(A)\{i = 0 \mapsto \langle A, e\rangle, i = 1 \mapsto \langle B, \mathrm{idEquiv}\rangle\}$$

泛等公理第一步大功告成! □

接下来那些非平凡的类型上的相等就可以证明了, 这里给出一些简单的例子:

命题 7.1.1: 如下命题成立:
- $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ 以及 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}$
- $A \times B = B \times A$ 以及 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $(\mathrm{Bool} \to A) = A \times A$ 以及 $(\mathrm{Bool} \times A) = A + A$
- $\mathrm{List}(A) = (\mathbb{N} \to A)$

7.2. 胶合类型其余的规则

我们可以把宇宙复合 Hcom「代理」到胶合类型上. 假设存在如下隐式转换:

$$\mathrm{Partial}(\top, A) \to A$$

它取出「实际上完整的部分类型」中的元素, 那么有

$$\frac{X : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = 0, \mathcal{U}_1)}{\mathrm{Hcom}(X) \coloneqq \mathrm{Glue}(X(0))\{\varphi \mapsto \langle X(1), \mathrm{coe}_{\simeq}(...)\rangle\}}$$

其中 $\mathrm{coe}_{\simeq}(...)$ 省略, 起到的作用是从 $\varphi \vdash X : (i : \mathbb{I}) \to \mathcal{U}_1$ 中得到 $X(0) \simeq X(1)$ 的证明. 省略的原因是它涉及 isEquiv 的细节, 这部分对不熟悉同伦类型论的读者不友好, 而且已经留作练习了.

至此, 复合操作的最后一块拼图也完成了, 但我们还得定义胶合类型上的复合操作和转换规则, 但好在这些步骤不再需要新的构造了, 对 isEquiv 一通操作即可, 当然步骤非常的繁琐.

胶合类型本身有类似复合的计算规则:

$$\mathrm{Glue}(A)\{\top \mapsto \langle T, e\rangle\} \equiv T$$

换言之, $\varphi \vdash \mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto \langle T, e\rangle\} \equiv T$. 也可以使用子类型表示:

$$\mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto e\} : \{\mathcal{U}_1 \mid \varphi \mapsto T\}$$

作为一种形成规则, 胶合类型也有配套的构造规则和消去规则. 构造规则虽然长, 但实际上很直观:

$$\frac{\varphi \vdash e : T \simeq A \qquad \varphi \vdash t : T \qquad u : \{A \mid \varphi \mapsto e.1(t)\}}{\mathrm{glue}(u)\{\varphi \mapsto t\} : \mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto \langle T, e\rangle\}}$$

它也有类似复合的计算规则:

$$\mathrm{glue}(u)\{\top \mapsto t\} \equiv t$$

这也可以用子类型表示:

$$\mathrm{glue}(u)\{\varphi \mapsto t\} : \left\{\mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto \langle T, e\rangle\} \mid \varphi \mapsto t\right\}$$

消去规则则依存于类似复合的计算规则, 因为 φ 下有 $u : T$ 成立:

$$\frac{u : \mathrm{Glue}(A)\{\varphi \mapsto \langle T, e\rangle\}}{\mathrm{unglue}(u) : \{A \mid \varphi \mapsto e.1(u)\}}$$

至于 β, η 规则比较直观, 本质上就是互相抵消, 就姑且省略了.

通过这些构造, 可以定义胶合类型上的复合操作和转换规则. 这两者本质上就是调用胶合类型的构造规则 glue, 然后传入适当的参数.

由于具体的构造步骤非常繁琐, 而且涉及立方类型论的具体细节, 本讲义是尽可能站在抽象的「立方类型论」的视角描述这些构造的, 而每一个版本的立方类型论中各种定义都有微妙的区别, 这些区别又大幅影响这些具体计算的流程, 列出了可能会让读者头晕, 故省略.

对自己有信心或者想满足自己好奇心的读者可以参见 [8] 的 3.6 和 4.6 两节. 坚称自己是天选之人的读者可以考虑将这个构造作为练习.

7.3. 独立的宇宙复合

借助胶合类型实现宇宙复合有比较严重的性能问题, 因为相等在代码中的表示是「含有一个维度变量的值」, 这比起「一个转换函数配套它纤维可缩的证明」要小得多. 因此, 为了性能考量, 我们可以直接实现宇宙复合, 而不是通过胶合类型来代理.

这样的话, 需要再额外引入一对构造规则和消去规则, 以及 β, η 规则. 在 [5] 的附录和 [9] 中便是这样的风格. 这里罗列一下规则, 形成规则如下:

$$\frac{\varphi : \mathbb{F} \qquad A : (i : \mathbb{I}) \to \mathrm{Partial}(\varphi \vee i = 0, \mathcal{U}_1)}{\mathrm{Hcom}(A) : \{\mathcal{U}_1 \mid \varphi \mapsto A(1)\}}$$

于是对宇宙的复合可以直接计算到这个形成规则:

$$\mathrm{hcom}(A) \coloneqq \mathrm{Hcom}(A)$$

构造规则如下, 其实很类似 glue:

$$\frac{n : A(1) \qquad m : \left\{A(0) \mid \varphi \mapsto \mathrm{coe}_A^{-1}(n)\right\}}{\mathrm{box}(m)\{\varphi \mapsto n\} : \mathrm{Hcom}(A)}$$

注意这条规则中, 虽然 A 的值域是一个部分类型, 但在 φ 下它是完整的, 因此我们可以在此插入一个隐式转换, 并使用它的转换规则. 消去规则如下所示, 也用到了同一个隐式转换, 形式上也很类似 unglue:

$$\frac{u : \mathrm{Hcom}(A)}{\mathrm{cap}(u) : \{A(0) \mid \varphi \mapsto \mathrm{coe}_A^{-1}(u)\}}$$

计算规则和胶合类型一致. 至于它上面的复合操作和转换规则, 请读者参阅 [9] 的第 3.2 和 3.4 两节, 本质上也都是调用构造规则, 然后传入适当的参数. 注意本讲义中讨论的 Hcom 是从 0 到 1 的, 而 [9] 讨论的是 Descartes 立方类型论, 将 0 和 1 推广为参数 r 和 s.

在 Agda 中, 独立的宇宙复合叫做 `HCompU`.

7.4. V 类型

既然宇宙的复合有单独的实现了, 胶合类型就不需要做成方形的了 – 用胶合类型证明泛等公理时, 其中一边必定是平凡的等价, 那么直接删除这条边, 使用一个三角形就足够证明泛等公理了. 这个思路构造的类型叫 V 类型, 形成规则如下:

$$\frac{r : \mathbb{I} \qquad r = 0 \vdash A : \mathcal{U}_1 \qquad B : \mathcal{U}_1 \qquad r = 0 \vdash e : A \simeq B}{V^r(e) : \{\mathcal{U}_1 \mid r = 0 \mapsto A, r = 1 \mapsto B\}}$$

很明显, 通过 $e : A \simeq B$ 生成 $\langle r \rangle V^r(A, B, e) : A = B$ 的过程就已经达成了证明泛等公理的第一步. 构造规则如下:

$$\frac{u : A \qquad v : \{B \mid r = 0 \mapsto e.1(u)\}}{\mathrm{Vin}^r(v)\{u\} : \{V^r(e) \mid r = 0 \mapsto u, r = 1 \mapsto v\}}$$

这里将 u 放在大括号里是为了和前面的 glue 中的 $\{\varphi \mapsto u\}$ 参数保持统一, 使得这两者的联系能一眼看出来. 消去规则如下:

$$\frac{u : V^r(e)}{\mathrm{Vproj}^r(u) : \{B \mid r = 0 \mapsto e.1(u), r = 1 \mapsto u\}}$$

计算规则如下:

$$\mathrm{Vproj}^r(\mathrm{Vin}^r(v)\{...\}) \equiv v$$

其余规则篇幅所限, 不再罗列, 感兴趣的读者可以参阅 [9] 的第 3.1 和 3.3 两节. 这些规则看似非常恐怖, 实际上它有很多文本是在描述一些中间变量的类型, 这些类型在实现编译器的时候是不需要写的, 我们只构造值即可. 只是在形式化类型论的时候, 必须给出这些具体的类型.

值得一提的是, V 类型的转换规则和复合操作也都是调用构造规则 Vin, 这一点上可以看出它和胶合类型的高度相似性.

很显然, V 类型作为泛等公理的证明, 内存性能优于胶合类型.

8. 高阶归纳类型

这里假定读者已经对高阶归纳类型有基本的概念, 即允许构造子的返回类型是归纳类型上的相等类型、这些相等类型上的相等类型、等等的归纳类型.

立方类型论对高阶归纳类型给出了一套相对比较统一的语法. 这里给出两个同伦型的例子和一个小学数学中的例子: 圆周 S^1, 甜甜圈的表面 T^2 和对称的整数类型 $\mathbb{Z}$.

例子 8.1: 在同伦类型论中, S^1 由如下构造子生成:

$$\bullet : S^1 \qquad \mathrm{loop} : \bullet = \bullet$$

这对应了圆周的同伦型: 它是一条道路, 两端点相等.

圆周的消去规则或者说模式匹配需要确保: $\bullet$ 被映射到某个值 $x : X$、loop 被映射到某个相等证明 $x =_X x$.

例子 8.2: 在同伦类型论中, 令相等类型的拼接操作为

$$\mathrm{cat} : (x = y) \to (y = z) \to (x = z)$$

则 T^2 由如下构造子生成:

$$\bullet : T^2 \qquad \mathrm{line}_1, \mathrm{line}_2 : \bullet = \bullet$$

$$\mathrm{surf} : \mathrm{cat}(\mathrm{line}_1, \mathrm{line}_2) =_{\bullet=\bullet} \mathrm{cat}(\mathrm{line}_2, \mathrm{line}_1)$$

它的消去规则或者说模式匹配需要确保: $\bullet$ 被映射到某个值 $x : X$, $\mathrm{line}_1, \mathrm{line}_2$ 分别被映射到某个相等证明 $x =_X x$,

可以看出, 这些构造子的类型比较复杂, 相等类型可以多重嵌套, 因此要想设计一种通用的语法框架来定义它们是比较麻烦的.

例子 8.3: 对称的整数类型由如下构造子生成:

$$\frac{n : \mathbb{N}}{+n : \mathbb{Z} \qquad -n : \mathbb{Z}} \qquad \mathrm{zeq} : +\mathrm{zero} =_{\mathbb{Z}} -\mathrm{zero}$$

它的消去规则或者说模式匹配需要确保: $+n$ 被映射到某个值 $f(n) : X$, $-n$ 被映射到某个值 $g(n) : X$, zeq 被映射到某个相等证明 $f(\mathrm{zero}) =_X g(\mathrm{zero})$.

这是一些常见的数学概念的高阶归纳类型定义, 除此之外还有在同伦类型论中非常重要的命题截断类型. 这也是一个非常重要的例子, 因为命题截断类型不仅是一个有参数的类型, 它的构造子还有递归的情况, 而立方类型论能正确处理它是一件很重要的事实. 令

$$\mathrm{isProp}(A) :\equiv (x, y : A) \to (x =_A y)$$

为「类型 A 是一个命题」这一事实, 则定义命题截断类型如下:

例子 8.4: 对于类型 $A : \mathcal{U}_1$, 它的命题截断记作 $\|A\|$, 由如下构造子生成:

$$\frac{u : A}{\mathrm{inj}(u) : \|A\|} \qquad \mathrm{trunc} : \mathrm{isProp}(\|A\|)$$

8.1. 立方类型论中的高阶归纳类型

方便起见, 引入如下符号:

定义 8.1.1: 定义「边界」操作如下:

$$\partial : \mathbb{I} \to \mathbb{F}$$
$$\partial(i) :\equiv i = 0 \vee i = 1$$

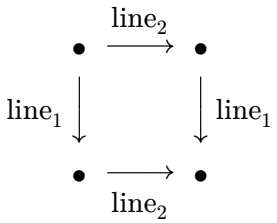
注意观察, 在立方类型论中, loop 的类型也可以看作

$$(i : \mathbb{I}) \to \{S^1 \mid \partial(i) \mapsto \bullet\}$$

而 surf 的类型更是可以使用更简洁的方法来表达:

$$(i, j : \mathbb{I}) \to \{T^2 \mid \partial(i) \mapsto \mathrm{line}_1 \ @\ j, \partial(j) \mapsto \mathrm{line}_2 \ @\ i\}$$

对应如下方块:



注意这种定义方式绕开了在构造子中使用 cat 操作, 也就是绕开了潜在的对 coe 的使用, 这在不丧失同伦论意义的情况下大大简化了定义. 这种情况下, 我们只需额外允许构造子返回以下两种类中之一即可:

1. 它对应的 (高阶) 归纳类型 D,
2. 某子类型 $\{D \mid \varphi \mapsto u\}$.

在模式匹配时, 若匹配到返回子类型的构造子, 则将子类型中的 u 应用到模式匹配中, 再检查兼容性即可. 这个说法有点抽象, 带入一个例子会容易许多: 考虑

$$\frac{m : X \qquad n : (i : \mathbb{I}) \to X \qquad u : S^1}{\mathrm{elim}_{S^1}(u, m, n) : X}$$

这个规则要求 $n(0) \equiv n(1) \equiv m$, 而这里的 m 是由 $\partial(i) \vdash \mathrm{elim}_{S^1}(u, m, n)$ 化简而来.

再考虑通用的情况, 令 D 为一个高阶归纳类型, $c : A \to D$ 为简单的构造子, $p : B \to \{D \mid \varphi \mapsto u\}$ 为高阶构造子. 函数

$$f : D \to X$$
$$f(c(a)) :\equiv m$$
$$f(p(b)) :\equiv n$$

中, 对于 p 构造子返回了 n, 因此它需要满足

$$\varphi \vdash f(u) \equiv n$$

而在 S^1 的例子中, $\varphi :\equiv \partial(i)$, 剩下的参数可以一一对应过来, 可以得到一样的「需要满足的等式」.

注意, 由于高阶归纳类型引入了典范的构造子 fhcom, 因此所有的模式匹配代码都需要额外处理这种情况. 在大部分使用消去子的类型论中, 这很简单: 通过消去子定义函数 $f : D \to C$ 时, 若 D 有典范的构造子 fhcom, 则令

$$f(\mathrm{fhcom}(\varphi \mapsto u)) \coloneqq \mathrm{fhcom}(\varphi \mapsto f(u))$$

即可.

9. 趣味问题一: 取反操作

若我们引入如下运算符, 姑且称之为「取反」:

$$\neg : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$$

并规定它满足如下等式:

$$\neg 1 \equiv 0 \qquad \neg 0 \equiv 1 \qquad \neg\neg i \equiv i$$

那么就会有一个新的方法证明相等类型的对称性:

命题 9.1: 若有 $p : x =_A y$, 则 $y =_A x$, 记作 p^{-1}.

证明: $\langle i \rangle p \ @ \ (\neg i)$ □

该证明性质比 Martin-Löf 类型论中的证明性质更强, 因为它满足如下等式:

$$\left(p^{-1}\right)^{-1} \equiv p$$

练习 9.1: 证明上述等式.

在 Martin-Löf 类型论中, 需要对 p 进行归纳才能证明这个等式的命题形式.

在不同的立方类型论具体定义中, 对取反操作的需求也不同. De Morgan 立方类型论中, 取反操作是类型论核心定义的一部分, 而 Descartes 立方类型论中则没有取反操作 (至少论文里没有 – 但这不代表它们不兼容).

在 Descartes 立方类型论中, 取反操作能带来一些比较逆天的东西, 例如如下语境限制:

$$i = \neg i : \mathbb{F}$$

我们还可以这样复合:

$$\mathrm{hcom}^{r \rightsquigarrow \neg r}(\lambda x.\ \{r = \neg r \mapsto u, ...\})$$

还可以反过来 $\mathrm{hcom}^{\neg r \rightsquigarrow r}$, 甚至可以 $\mathrm{hcom}^{\neg r \rightsquigarrow \neg s}$. 我们可能需要对这些不同的复合表达式进行一些额外的化简.

9.1. 趣味应用: 中点问题

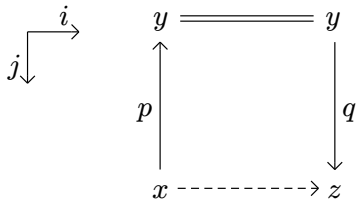
在前面介绍的立方类型论和 Martin-Löf 类型论中, 拼接两个相等 $p : x =_A y, q : y =_A z$ 的时候, 拼出来的 $\mathrm{cat}(p, q) : x =_A z$ 就不再能取出中间的那个 y 了, 但我们现在可以操作一番 (例子来自笔者的另一篇笔记 [10]):

$$h(i) \coloneqq \mathrm{hcom}^{\neg i \rightsquigarrow i}\left(\lambda j.\ \begin{cases} \neg i = i \vee j = 0 \mapsto y \\ i = 0 \qquad\qquad \mapsto p \ @ \ \neg j \\ i = 1 \qquad\qquad \mapsto q \ @ \ j \end{cases}\right)$$

大致检查一下:

- 令 $j \coloneqq 0$, 也就是底面 y, 我们考察它和另外两条是否兼容.
  - 若代入 $i = 0$ 分支, 得到 $p \ @ \ \neg 0 \equiv p \ @ \ 1 \equiv y$, 没有问题,
  - 若代入 $i = 1$ 分支, 得到 $q \ @ \ 0 \equiv y$, 更没有问题.
- $h : \mathbb{I} \to A$, 那么我们自然会好奇它的两个端点是什么.
  - 考虑 $h(0)$, 观察三条分支, $\neg i = i$ 不成立, $i = 0$ 成立, 而复合返回的时候需要 $j \coloneqq 1$, 因此给出 $p \ @ \ \neg 1 \equiv x$, 因此 $h(0) \equiv x$,
  - 考虑 $h(1)$, 只有 $i = 1$ 成立, 因此给出 $q \ @ \ 1 \equiv z$, 因此 $h(1) \equiv z$.

看起来 $h : x =_A z$, 所以从 p, q 构造 h 的过程是在拼接两个相等, 虽然和传统的定义稍微有所不同, 但大致思路是一样的, 如图:

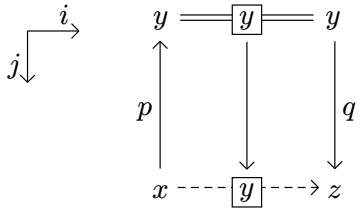


但事实真的如此简单吗? 考虑如下情况:

$$k = \neg k \vdash h(k) \equiv y$$

练习 9.1.1: 验证上述等式.

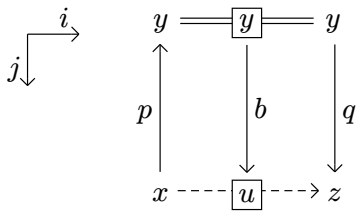
我们能通过一些语境限制, 把这个拼接操作的中点拿出来, 如图所示.



看起来这个过程是允许我们取中点, 但事实上我们可以在这个所谓的「中点」放任何东西, 而不必是原本两个相等中的公共点, 因为 $i = \neg i$ 这个等式和其它两条边是互斥的, 我们只需要保证它和底面兼容即可, 因此我们可以做这种事情:

$$h(i) \coloneqq \mathrm{hcom}^{\neg i \rightsquigarrow i} \left(\lambda j. \begin{cases} j = 0 & \mapsto y \\ \neg i = i & \mapsto b \ @ \ j \\ i = 0 & \mapsto p \ @ \ \neg j \\ i = 1 & \mapsto q \ @ \ j \end{cases} \right)$$

其中 $b : y = u$. 这样就得到了「左右两边分别是 x 和 z 但中间是 u」的全新相等 h, 本质上也就是让中间那条竖线变得非平凡, 如图所示.



但即便如此, 引入取反操作并不意味着存在某个值 $½ : \mathbb{I}$, 这点还需要注意. 因为在空语境中, $\mathbb{I}$ 还是只有 0 和 1 两个实例. 如果真的要引入 $½ : \mathbb{I}$ 也不是不可以, 但是这会引出额外的复杂性 (它和下文介绍的推广复合操作有非平凡的交互, 处理起来会给普通的代码带来性能负担), 而且并不能解决立方类型论中的现有问题.

10. 趣味问题二: 推广复合

前面说过, 我们痛恨零复合, 那么自然会有读者产生如下两个疑问:

1. 它到底有多坏?
2. 有没有办法防止它产生呢?

零复合来自于所谓「准零复合」, 也就是不完整的复合, 例如 $\mathrm{hcom}(\lambda x.\{i = 0 \mapsto u, x = 0 \mapsto v\})$. 而所谓的「不完整」, 就是存在某个替换 σ 能把这个复合变成一个零复合, 比如前面这个例子就可以通过 $\sigma \coloneqq [i \mapsto 1]$ 这个替换变成空的. 因此, 如果我们想要消灭零复合, 就首先需要消灭准零复合.

在 [11] 和 Agda 中有一个思路类似的解决方法: 推广复合. 这是复合操作的一种升级, 它收取和 hcom 完全一样的输入, 但转化为 hcom 时会找到缺失的面, 并把底面给贴上去. 这样, 就可以一定程度上消灭准零复合.

一个感性的定义如下 (为了可读性, 使用了和之前定义复合时稍微不一样的写法):

$$\frac{i : \mathbb{I}, \varphi \vee i = 0 \vdash u : A}{\mathrm{ghcom}\left(\lambda i.\left\{\underbrace{\varphi \vee i = 0 \mapsto u}\right\}\right) \coloneqq \mathrm{hcom}\left(\lambda i.\left\{\underbrace{\varphi \vee i = 0 \mapsto u}, \neg\varphi \mapsto u[i \mapsto 0]\right\}\right)}$$

这里「找到缺失的面」这个操作记作 $\neg\varphi$, 可以理解为 $\mathbb{F}$ 的「取反」操作, 因为它要找到一组面的「其它部分」. 注意和 $\mathbb{I}$ 的取反区分, 这两个操作完全不是一回事. 这个操作的定义有些复杂, 涉及语义的细节, 因此我们不在这里展开.

推广复合还有异质的版本, 叫 gcom, 思路类似, 也不再展开.

在 [11] 和 [5] (图表 4.2) 中 (定义几乎是一模一样的), 推广复合操作的定义是归纳的, 而且没有用到这个取反操作. 这个版本的推广复合又叫「AFH 推广复合」, 名字出自 [11] 的三位作者的姓氏首字母. 归纳定义使用文字叙述如下:

- 令 $\varphi \coloneqq \bot$, 也就是空的推广复合, 这种情况会直接给出底面, 因为侧面全部被填上了底面,
- 对于 $r = s \mapsto u$ 这个面, 它首先给出 $r = 0 \wedge s = 0 \mapsto u$ 和 $r = 1 \wedge s = 1 \mapsto u$, 然后再对于 $r = 1 \wedge s = 0$ 和 $r = 0 \wedge s = 1$ 分别进行推广复合, 这样一路到头变成空的之后就可以走上一条规则.

代码实现可以参考 András Kovács 的 cctt 项目[5]. [11] 的作者之一 Favonia 说这个推广复合非常的恐怖, Jonathan Sterling 认为实现这个版本的推广复合非常的痛苦. 笔者推测可能的原因是它在论文里的版本只考虑了 $r = s \mapsto \ldots$ 这样的边界, 没有考虑 $r = s \wedge r' = s' \mapsto \ldots$ 等情况, 明显这些情况处理起来更麻烦. 总之 András Kovács 认为它棒极了.

在 Agda 中, 推广复合的实现不太一样, 但大体思路是一致的, 感兴趣的读者可以查阅论文 [12] 的第 5.2 节. 注意: Agda 的立方类型论功能有两篇标题完全一样的论文, 一篇发表于 ICFP 会议, 一篇发表于 JFP 期刊, 后者是最新版本, 请大家尽量阅读后者. 本文的参考文献中, 引用的也是后者.

[5] https://github.com/AndrasKovacs/cctt/blob/c2576da9afd7050d78b672f9954d8e6b7bca5020/src/Core.hs#L1103-L1147

10.1. 趣味应用: Brunerie–Ljungström 数

在同伦类型论的早期研究中, Guillaume Brunerie 证明了以下命题:

命题 10.1.1: 存在 $n : \mathbb{Z}$ 使得 $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.

这个数被称为 Brunerie 数. 经典同伦论表明 n 等于 ± 2, Brunerie 也在同伦类型论中证明了这一点. 需要强调的是, Brunerie 数的定义是构造主义的, 且他构造了一串函数, 复合过后会输出这个 2. 这个证明本身意义并不明显, 但是在构造这个证明的过程中需要用到大量抽象同伦论的结论, Guillaume Brunerie 为了证明这一结论, 大力发展了综合同伦论 (也就是同伦类型论中的同伦论), 这是非常重要的贡献.

而在同伦类型论的计算机实现中, 我们可以写出这个程序, 然后让计算机自动计算出该数的值. 对于立方类型论而言, 这是一个很好的测试用例. Guillaume Brunerie 的博士论文中跳过了一些比较麻烦的步骤, 所幸人们基本补上了这些步骤, 在各个不同的版本的立方类型论实现中都定义了这个程序.

很遗憾, 所有计算这个程序的尝试都失败了, 例如 Favonia 使用了一台 1TB 内存的电脑来运行, 最终该程序在 90 小时后内存溢出. 而 Minghao Liu 使用 Scala 实现了一个能动态编译 (也就是将立方类型论中的闭包和替换操作全部提升到 Java 虚拟机中的函数和函数应用, 而 Java 虚拟机可以将之进一步编译为机器码) 的立方类型论实现[6], 并且支持了独立的宇宙复合, 但依然内存溢出. 最可怕的是, 由于我们从未完整地运行这个程序, 我们永远也不知道我们最终需要化简多少个零复合, 只能知道这个数量太多, 我们连计算它的数量都做不到.

Axel Ljungström 对这个程序进行了简化, 得到了一个等价但更简单的程序, 同样是计算 $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ 中的 n, 但使用了不同的算法, 参见 [13]. 本文为了区分, 将这个新的程序称为 Brunerie–Ljungström 数. 这个数字在实现了推广复合的 Agda 中可以快速算出结果, 算出来是 -2. 值得一提的是, Agda 版本的 Brunerie–Ljungström 数在计算时, 如果去掉推广复合而改为直接使用复合, 会出现类型错误. András Kovács 发现可以通过人工插入一些胶合类型相关的规则来解决这个问题[7].

在 András Kovács 的实现中 (用到了他发明的胶合求值法), 在没有推广复合的时候, Brunerie–Ljungström 数可以在 50 秒左右算出来. 此时, 每次使用胶合类型的转换规则都会产生两个零复合. 该计算中途产生了 6 千万个零复合. 当然, 这个时候用到了他人工插入的那些胶合类型的规则.

而加上了推广复合后, 这个程序只需要 0.5 毫秒就能算出来, 不再有类型错误, 而且中途只会产生 700 个零复合. 这大约是十万倍的性能提升, 且零复合的数量减少到了十万分之一. 足以看出零复合多么可恨!

至此, Brunerie 数的传奇已经基本告一段落, 不知道还有没有勇士会去试图计算原版的 Brunerie 数, 不过这基本不能带来任何收益, 因为我们已经有足够优化的立方类型论实现, 有了更好的定义, 而且我们在写这个程序之前就已经知道答案. 若要做出新的结果, 需要计算更高阶的同伦群, 而编写这个程序的难度也会大大增加.

目前 Brunerie 数基本上已经变成一个梗, 用来指代难以计算出结果的类型论程序.

[6] https://github.com/molikto/mlang

[7] https://github.com/AndrasKovacs/cctt/blob/c2576da9afd7050d78b672f9954d8e6b7bca5020/tests/new_brunerie_adjusthcom.cctt#L970-L1031, 十分推荐阅读, 因为实在是太好笑了.

11. De Morgan 立方类型论与 Agda

Agda 的立方类型论支持逆归纳类型. 这是一个非常棒的特性, 它借助立方类型论的相等类型给逆归纳类型带来了普适的「互拟」的定义, 也就是逆归纳类型的相等关系. 它的原理是这样的: 对于逆归纳类型 R 和 $r_1, r_2 : R$, 类型 $r_1 =_R r_2$ 的构造规则是这样检查的: 给定 $i : \mathbb{I} \vdash u : R$, 对于每个逆构造子 $p : R \to X$, 要求如下等式成立:

$$p(u[i \mapsto 0]) \equiv p(r_1), p(u[i \mapsto 1]) \equiv p(r_2)$$

这样的话, 我们可以直接在定义 u 的时候使用逆模式匹配, 就可以在 r_1 和 r_2 仅在逆归纳的情况下相等的时候构造出 u. 这正是我们对互拟的期望, 但由于这个概念本身也是逆归纳的, 在 Agda 中需要对每个逆归纳类型单独定义. 但立方类型论的相等类型本身如果也在逆归纳类型的情况下做成逆归纳的, 就可以直接扮演互拟的角色.

除此之外, Agda 中的相等类型的构造规则直接使用了普通的 λ 表达式的语法, 并且会根据表达式的类型在类型检查期间将相同的语法转化成不同的表达式. 这是非常美好的, 因为它减少了语法本身的复杂度.

立方类型论最早的完全体版本叫做 De Morgan 立方类型论, 它这个名字来源于它给 $\mathbb{I}$ 类型加的几个底层操作:

$$\frac{i : \mathbb{I}}{\neg i : \mathbb{I}} \qquad \frac{i, j : \mathbb{I}}{i \vee j : \mathbb{I} \qquad i \wedge j : \mathbb{I}}$$

这几个操作满足 De Morgan 律 (也就是 Boole 代数里面的那几个分配律以及 $\neg\neg i \equiv i$), 但它又不是 Boole 代数, 因为它并不满足 $i \vee \neg i \equiv 1$ 这个规则. 在这种情况下, $\mathbb{I}$ 类型的表达式和 $\mathbb{F}$ 类型的表达式就可以建立一一对应关系, 这也是得益于 De Morgan 立方类型论中语境限制的设计非常克制: 它没有对角线, 也就是说不能在 i, j 都是变量的情况下使用 $i = j$ 这样的语境限制.

对于 $i : \mathbb{I}$, 写下 $i = 1$ 就将它转化为 $\mathbb{F}$ 类型的实例了, 而反过来基本上也能机械化地翻译, 例如我们想表达 $i = 1 \vee j = 0$, 就直接写 $i \vee \neg j$, 看起来真是方便到家了, 语法里甚至都不需要 $\mathbb{F}$ 这个概念了.

这里的 $\neg$ 操作和前文所述的取反操作是同一个概念, 但是在 De Morgan 立方类型论中它是必须的, 因为它需要用这个操作来描述 $i = 0$ 的情况.

Descartes 立方类型论在这方面迥然不同: 它有更加复杂的 $\mathbb{F}$ 类型和更加简单的 $\mathbb{I}$ 类型. 前文反复提到的 Descartes 版本的 coe 操作和复合操作也更加复杂, 这也是一个重要区别, 因为 De Morgan 的 coe 是固定从 0 到 1 的, 但我们可以通过取反操作来实现 1 到 0.

在这个设计哲学下, Agda 在引入 De Morgan 立方类型论的支持时, 根本就没做 $\mathbb{F}$ 这个类型, 而是做了个类型叫 $\mathrm{IsOne} : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_0$, 用来表达将 $\mathbb{I}$ 的实例看作 $\mathbb{F}$ 时的样子. 这个类型有唯一构造子 $1{=}1 : \mathrm{IsOne}(1)$, 目的和行为都非常显然. 因此 $\mathbb{I}$ 类型身兼二职, 在使用的时候靠变量名区分. 例如我们写下 $\varphi : \mathbb{I}$ 的时候, 就是在暗示它接下来要被当成 $\mathbb{F}$ 来用, 而写下 $i : \mathbb{I}$ 的时候, 则说明它就代表普通的坐标轴变量.

Agda 的部分类型的内部表示类似于函数 $\mathrm{IsOne}(i) \to A$ (但语法上还是记作 $\mathrm{Partial}(i, A)$), 构造规则是对 $\mathrm{IsOne}(i)$ 进行模式匹配, 其中的模式就是语境限制表达式. 比如 $\mathrm{IsOne}(i \vee \neg i)$ 就需要给出两个模式 $i = 0$ 和 $i = 1$, 这样的话函数定义时的模式匹配语法也能用在定义部分元素上.

到目前为止, 我们介绍了 De Morgan 立方类型论和 Agda 的实现中一些优雅的设计, 除此之外还有颇为标准的胶合类型和宇宙复合等基本构造, 这些都非常标准, 不再赘述. 除此之外, 这当中还有一些让笔者非常难以接受的设计, 我们一一介绍.

11.1. 设计缺陷

前面说了, Agda 的部分元素使用模式匹配的语法. 这实际上是一件很糟糕的事情, 有很多烦人的地方:

1. IsOne 不是归纳类型, 因此 Agda 的一些归纳类型模式匹配的便利功能 (例如在 Emacs 或者 VS Code 中自动生成模式匹配的快捷键) 并不能用在这里, 每次模式匹配都必须手写, 参见[8].
2. 这种混用导致了一些结构归纳的问题, 熟悉 Agda 的 with 关键字的读者应该能直接猜到这个限制, 这和 Agda 实现模式匹配表达式的策略有关, 本文不再赘述.
3. 模式匹配的语法非常不自由. 用户写不出 $i = 0 \vee j = 1$ 这样的模式, 而这一切都是因为没有专门的 $\mathbb{F}$ 类型.

除此之外, 它沿用了 De Morgan 立方类型论的 coe 实现, 记作 transp, 类型如下:

$$\frac{A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1 \qquad \varphi : \mathbb{I} \qquad i : \mathbb{I}, \varphi = 1 \vdash A(i) \equiv A(0)}{\mathrm{transp}^{\varphi}_{A} : (u : A(0)) \to \{A(1) \mid \varphi = 1 \mapsto u\}}$$

这个规则中唯一值得解读的地方就是 $i : \mathbb{I} \vdash A(x) \equiv A(0)$ 这个条件, 它实际上想表达的意思是在 $\varphi = 1$ 时, A 这个函数是一个常函数, 但常函数这个概念在类型论底层是没法表达的, 因此它用了一个等价的条件来代替, 也就是给 A 传入一个参数, 然后看这个结果是不是等于给 A 传入另一个参数.

因此, 当 $\varphi = 1$ 成立时, A 是常函数, 因此有 $A(0) \equiv A(1)$, 因此 $u : A(1)$ 也是成立的, 所以那个立方子类型是有意义的.

回顾我们在类型转换一节的定义: 必须要能证明

$$\mathrm{coe}_{\mathrm{idp}}(u) = u$$

在 De Morgan 立方类型论中, 我们需要更通用的版本 (这里方便起见把等号两边交换了, 这是因为 $u : A(0)$ 所以让它出现在等号左边的话, 就可以直接把 A 写在下标里, 然后这就是合法的依值相等类型):

$$u =_A \mathrm{transp}^{\varphi}_{A}(u)$$

证明: $\langle i \rangle \mathrm{transp}^{\varphi \vee \neg i}_{\lambda j.A(i \wedge j)}(u)$ □

这个证明解释起来很麻烦, 写了估计也没人看, 读者可以自己尝试验证一下它是否符合类型规则, 可以加深对于 De Morgan 立方类型论的底层构造的理解. 给出这个证明是为了让读者明白这个关于常量条件的参数的意义.

但是 Agda 的这个 transp 操作最坑的地方就在于它的这个参数的条件在类型里面没有表达出来, 它在代码里的类型就直接是:

$$\mathrm{transp} : (A : \mathbb{I} \to \mathcal{U}_1) \to (\varphi : \mathbb{I}) \to A(0) \to A(1)$$

乍看之下, 完全看不出第二个参数有什么用, 而且如果传的不好还会报错! 并且我们如果给 transp 定义一个别名, 例如定义 coeAgda ≔ transp, 这就会导致对 transp 的调用不满足要求, 从而也报错, 令人智熄.

即便有这么多缺陷, Agda 仍然是不可否认的目前最完善的立方类型论实现. 在这个意义上, Aya 编程语言是 Agda 的挑战者: 它也是面向编写大量证明设计的定理证明器, 但它采用了 Descartes

[8] https://github.com/agda/agda/issues/3412 和 https://github.com/agda/agda/issues/6051

立方类型论, 并且有独立的部分类型设计, 而不是沿用模式匹配. 但后者目前开发进度尚未足以和 Agda 竞争, 因为开发团队正在试验一些来自 cooltt 的想法, 请大家拭目以待.

12. 趣味问题三: 只有集合可以吗

命题 12.1: 在立方类型论中, 去掉胶合类型和 V 类型, 仅保留独立的宇宙复合, 可以得到一个正则性成立的立方类型论.

很显然, 这个类型论中没有泛等公理, 因此同伦类型论中的很多结论无法表达, 例如我们无法对圆周使用编码–解码法. 但它有别的用途: 提供一个 Martin-Löf 类型论的升级, 其中有高阶归纳类型, 且函数外延性成立. 这种情况下类型论很接近外延类型论 – 我们失去了研究高维对象的能力 (虽然能表达, 但几乎没有能证明的性质).

定义 12.1: 满足 K 公理的类型叫做集合.

因此我们希望能引入全局的 K 公理, 这样一切便坍缩到集合. 这种情况下圆周之类的高阶归纳类型还是能写出来, 但是没有任何意义, 因为全局的 K 公理使得它等价于单位类型.

Jonathan Sterling 提出了一条规则, 这个规则专门用于在立方类型论中引入 K 公理, 并在这个基础上定义了类型论 XTT [14]:

定义 12.2: 如下规则叫做边界分离:

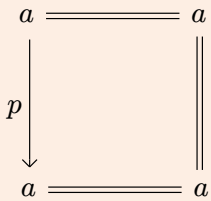
$$\frac{r : \mathbb{I} \qquad \partial(r) \vdash a \equiv b : X}{a \equiv b : X}$$

换言之, 对于任意表达式 $r : \mathbb{I}$, 若某个等式在 $r = 1$ 和 $r = 0$ 时均成立, 那么它恒成立.

练习 12.1: 根据边界分离证明 K 公理的常见形式, 例如

$$\forall p : a = a, \exists q : p =_{a=a} \mathrm{idp}$$

即对于任意 $p : a = a$ 构造如下方形:



注意: XTT 比起 Martin-Löf 类型论依然复杂了许多, 因为它需要引入复合运算, 这意味着部分元素等构造也必须一并引入, 但不会有零复合的问题, 因为它没有泛等公理, 所以正则性成立, 因此我们可以直接把正则性作为类型论规则引入.

13. 其它的扩展方式和有趣的性质

本节简要介绍一些其余的难以展开讲解的扩展立方类型论的手法, 和一些比较有趣的性质.

定义 13.1: 有向区间类型 2 有实例 $0:2$ 和 $1:2$, 在其上有 De Morgan 代数的结构, 且对于 $i,j:2$, 有对角线语境限制 $i=j:\mathbb{F}$, 且如下等式成立:

$$i\vee(i\wedge j)=i$$
$$i\wedge(i\vee j)=i$$

命题 13.1: 有合法的语境限制 $i\leq j:\mathbb{F}$, 等价于 $i=i\wedge j$.

若一立方类型论同时支持有向区间类型和传统的区间类型, 则称其为双立方类型论. 双立方类型论中可以描述单形. 以三角形为例:

$$i,j:\mathbb{I},i\leq j\vdash\mathcal{J}$$

就描述了一个三角形. 若将 $i,j:\mathbb{I}\vdash\mathcal{J}$ 视为一个正方形的话, 那么我们得到的三角形是一个等腰直角三角形, 其中 $i=j$ 这条边是斜边, 直角边分别为 $i=0$ 和 $j=1$.

这个类型论类似于单纯类型论, 但后者使用双单纯集.

立方类型论中, 我们仍然可以引入一个新的相等类型, 它几乎等价于原本的相等类型, 但我们额外引入一个实例 idp, 这个实例计算时基本上表现为原版的相等类型的 idp, 但 coe 操作遇到它时直接表现为常量. 但这个相等类型需要和原版的相等类型手动转换, 且高阶归纳类型只能使用原版的相等类型, 因此比较受限. 这个想法由 Andrew Swan 提出, 在 Agda 中也有实现, 叫做 `Id`.

若某类型构造子 $M:\mathcal{U}\to\mathcal{U}$ 对于任意替换 σ 和任意类型 A, 都有 $M(A)[\sigma]$ 的结果依然是以 M 开头被应用的形式, 那么称 M 是「稳定」的. 注意这个稳定的概念和范畴论中的名词类似, 但不同义. 这个定义可以推广到任意形成规则, 比如 Π,Σ 类型等. 容易看出, 在 Martin-Löf 类型论乃至同伦类型论中, 所有的形成规则都是稳定的, 所以在这些类型论里面不怎么讨论这个性质.

但在立方类型论中, 有些形成规则是不稳定的, 最简单的两个例子就是独立的宇宙复合和证明泛等公理用的类型 (包括胶合类型和 V 类型), 它们可能随着复合操作本身的计算规则而被化简为其它的形成规则.

14. 术语中英对照表

本讲义对许多目前没有标准翻译的类型论术语按照香蕉空间的规范给出了中文翻译, 以下是一个对照参考表. 有很多术语的英语版本非常的混乱, 笔者在翻译时擅自进行了整理, 并且欢迎读者提出更好的建议, 不过需要尽可能遵循本讲义的命名原则.

通识概念:

传递性 transitivity
对称性 symmetry
结构 structure
性质 property
填充 fill
商集 quotient set
归纳 induction
对角线 diagonal
中点 midpoint

同伦论名词:

同伦型 homotopy type, anima, ∞-groupoid
经典同伦论 classical homotopy theory
环路空间 loop space
纬悬 suspension
紧生成弱 Hausdorff compactly generated weakly Hausdorff, CGWH
万有覆叠 universal cover
道路 path
单纯集 simplicial set
单纯复形 simplicial complex
同伦扩张提升性质 homotopy extension and lifting property, HELP
方形范畴 category of cubes
单形范畴 category of simplices
圆周 circle
甜甜圈的表面 torus
Kan 填充操作 Kan filling operation

纬悬的另一个很好的翻译是「双角锥」.

范畴论以及范畴语义相关名词:

指数对象 exponential object
语境范畴 category of contexts
自函子 endofunctor
预层 presheaf
形式丛 display map
预层模型 presheaf model, category with families, CwF
子对象分类子 subobject classifier
子对象 subobject

数学或同伦类型论名词:

立方类型论 cubical type theory
Descartes 立方类型论 Cartesian cubical type theory
同伦类型论 homotopy type theory
编码–解码 encode–decode
模态 modality
模态类型论 modal type theory
泛等公理 univalence axiom
高阶归纳类型 higher inductive type
相继式演算 sequent calculus
自然演绎 natural deduction
研究生引理 grad lemma
命题截断 propositional truncation
可缩纤维等价 contractible fiber equivalence
半伴随等价 half-adjoint equivalence
综合同伦论 synthetic homotopy theory

编程语言名词:

De Bruijn 编号 De Bruijn index
无名表示 nameless representation
语法树 syntax tree
模式匹配 pattern matching
化简 reduction
类型转换 coercion, cast
子类型 subtype
胶合求值法 glued evaluation
闭包 closure
动态编译 just-in-time compilation, JIT
替换操作 substitution

类型论规则:

形成规则 formation rule
构造规则 introduction rule
消去规则 elimination rule
计算规则 computation rule
唯一性规则 uniqueness rule

类型论性质:

一致性 consistency
合流性 confluence
正规性 normalizing
正规化 normalization
正规形式 normal form
典范性 canonicity
典范形式 canonical form

类型论中的类型:

依值相等 polymorphic equality
异质相等 heterogeneous equality
构造子 constructor
相等类型 identity type, equality type
归纳类型 inductive type
逆归纳类型 coinductive type
积类型 product type
宇宙 universe

类型论其余名词:

相等 (无修饰语) judgmental equality
相等证明 identity proof, equality proof
函数外延性 function extensionality
命题相等 propositional equality
依值类型 dependent type
宇宙层次 universe hierarchy
粗略但好使的分层 crude but effective stratification
判断 judgment
语境 context
外延类型论 extensional type theory
命题宇宙 universe of propositions

立方类型论和双层类型论名词:

面映射 face map
语境限制 context restriction
余纤维化 cofibration
双层类型论 two-level type theory, 2ltt
Kan 类型 fibrant type, Kan type
外类型 exo-type
部分类型 partial type
部分元素 partial element
扩张类型 extension type
复合 composition
同质复合 homogeneous composition, hcom
异质复合 heterogeneous composition, com
零复合 null composition
准零复合 nullable composition
推广复合 generalized composition
正则性 regularity
胶合类型 glue type
边界 boundary
取反 (针对 $\mathbb{I}$) involution
取反 (针对 $\mathbb{F}$) negation
双立方类型论 bicubical directed type theory
有向区间类型 directed interval type
单纯类型论 simplicial type theory
边界分离 boundary separation

参考文献

[1] T. Univalent Foundations Program, *Homotopy Type Theory — Univalent Foundations of Mathematics, First Edition*, 2023.

[2] K.-B. Hou (Favonia), C. Angiuli, and R. Mullanix, "An order-theoretic analysis of universe polymorphism," *Proc. ACM Program. Lang.*, vol. 7, no. POPL, 2023, doi: 10.1145/3571250. [Online]. Available: https://doi.org/10.1145/3571250

[3] T. Zhang, "A tutorial on implementing de morgan cubical type theory," 2023. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2210.08232

[4] A. Kovács, "Staged compilation with two-level type theory," *Proc. ACM Program. Lang.*, vol. 6, no. ICFP, Aug. 2022, doi: 10.1145/3547641. [Online]. Available: https://doi.org/10.1145/3547641

[5] C. Angiuli, "Computational semantics of cartesian cubical type theory," Thesis, Carnegie Mellon Univ., Pittsburgh, PA, USA, 2019.

[6] E. Cavallo, and R. Harper, "Higher inductive types in cubical computational type theory," *Proc. ACM Program. Lang.*, vol. 3, no. POPL, Jan. 2019, doi: 10.1145/3290314. [Online]. Available: https://doi.org/10.1145/3290314

[7] C. Angiuli, G. Brunerie, et al., "Syntax and models of cartesian cubical type theory," *Math. Structures Comput. Sci.*, vol. 31, no. 4, p. 424, 2021, doi: 10.1017/S0960129521000347.

[8] S. Huber, "A cubical type theory for higher inductive types," 2017. [Online]. Available: https://simhu.github.io/misc/hcomp.pdf

[9] C. Angiuli, E. Cavallo, K.-B. Hou (Favonia), and J. Sterling, "A cool cartesian cubical type theory," 2019. [Online]. Available: https://github.com/Infinity-Type-Cafe/ntype-cafe-summer-school/blob/main/2023/cubical/kan.pdf

[10] T. Zhang, "Cartesian 🎲 category with involution," 2023. [Online]. Available: https://vixra.org/abs/2306.0017

[11] C. Angiuli, K.-B. H. (Favonia), and R. Harper, "Computational higher type theory III: univalent universes and exact equality," 2017. [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/1712.01800

[12] A. Vezzosi, A. Mörtberg, and A. Abel, "Cubical agda: a dependently typed programming language with univalence and higher inductive types," *J. Functional Program.*, vol. 31, 2021, doi: 10.1017/S0956796821000034.

[13] A. Ljungström, and A. Mörtberg, "Formalizing …. and computing a brunerie number in cubical agda," 2023. [Online]. Available: https://arxiv.org/abs/2210.08232

[14] J. Sterling, C. Angiuli, and D. Gratzer, "Cubical syntax for reflection-free extensional equality," in *Proc. 4th Int. Conf. Formal Structures Computation Deduction (FSCD 2019)* in Leibniz International Proceedings in Informatics (Lipics), vol. 131, Dagstuhl, Germany, 2019, pp. 1–25, doi: 10.4230/LIPIcs.FSCD.2019.31. [Online]. Available: http://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2019/10538